Barycentre

1 Barycentre de deux points

Théorème 1 Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, α et β deux réels.
Lorsque $\alpha+\beta\neq 0$, il existe un et un seul point G tel que

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

Ce point est appelé barycentre des deux points pondérés (A,α) et (B,β)
On note $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\right\}$.
Si $\alpha=\beta\neq 0$ on dit que G est l'isobarycentre de A et B et on note $G=\text{isobar}\left\{A,B\right\}$

Remarque 1 L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$.

Théorème 2 Soient α et β tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$.

$$G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\right\}\Leftrightarrow\forall M\in\mathcal{P}:\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$$

Théorème 3 Le barycentre de (A,α) et (B,β) est situé sur la droite (AB).

Remarque 2 Si α et β sont de même signe : $G\in(AB)$
Si α etβ sont de signes contraires : $G\notin[AB]$
Si $|\alpha|>|\beta|$ alors G est plus près de A que de B.

Remarque 3 Si $k\neq 0$: $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\right\}=\text{bar}\left\{(A,k\alpha)\,(B,k\beta)\right\}$

2 Barycentre de trois ou quatre points

Théorème 4 Soient A,B et C trois points du plan, $\alpha,\ \beta$ et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
Il existe un et un seul point G tel que

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

Ce point est appelé barycentre des trois points pondérés $(A,\alpha)\,;(B,\beta)$ et (C,γ)
On note $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\,(C,\gamma)\right\}$.
Si $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ on dit que G est l'isobarycentre de A,B,C et on note $G=\text{isobar}\left\{A,B,C\right\}$

Théorème 5 Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, et soient $A,\ B,\ C$ trois points du plan $\mathcal{P}$.

$$G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\,(C,\gamma)\right\}\Leftrightarrow\forall M\in\mathcal{P}:\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}$$

Remarque 4 Si $k\neq 0$: $\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\,(C,\gamma)\right\}=\text{bar}\left\{(A,k\alpha)\,(B,k\beta)\,(C,k\gamma)\right\}$

Remarque 5 Si $\alpha=\beta=\gamma$, G est le centre de gravité du triangle ABC.

Théorème 6 (barycentre partiel) A condition que les barycentres existent :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}G=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\,(C,\gamma)\right\}\\H=\text{bar}\left\{(A,\alpha)\,(B,\beta)\right\}\end{array}\right.\Rightarrow G=\text{bar}\left\{(H,\alpha+\beta)\,(C,\gamma)\right\}}$$