

## 8 Exercices

### 8.1 Reconnaître une transformation

**Exercice 1** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. A tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M'$  défini par

$$M' \text{ est le barycentre de } (A; 1); (B; -2); (M; 3)$$

On définit ainsi une transformation  $f$  du plan  $\mathcal{P}$ .

1. Construire  $A' = f(A)$  et  $B' = f(B)$ .
2. Montrer qu'il existe un et un seul point  $\Omega$  du plan tel que  $f(\Omega) = \Omega$ . Construire  $\Omega$ .
3. Pour tout point  $M$  du plan, comparer  $\overrightarrow{\Omega M}$  et  $\overrightarrow{\Omega M'}$ . En déduire  $f$ .

**Exercice 2** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. A tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M'$  défini par

$$M' \text{ est le barycentre de } (A; 2); (B; -2); (M; 3)$$

On définit ainsi une transformation  $f$  du plan  $\mathcal{P}$ .

1. Construire  $A' = f(A)$  et  $B' = f(B)$ .
2. Montrer que  $\overrightarrow{MM'}$  est constant et reconnaître  $f$ .

**Exercice 3** Soit  $ABCD$  un carré et  $f$  l'application du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

1. Montrer que  $f$  admet un et un seul point invariant  $G$  et le construire.
2. Montrer que  $f$  est une homothétie de centre  $G$  dont on précisera le rapport.

**Exercice 4** Soit  $ABCD$  un carré de sens direct. On désigne par  $s_\Delta$  la réflexion d'axe  $\Delta$ .

1. Déterminer  $f_1 = s_{(AB)} \circ s_{(AD)}$
2. Déterminer  $f_2 = s_{(AB)} \circ s_{(CD)}$
3. Déterminer  $f_3 = s_{(AC)} \circ s_{(BD)}$

### 8.2 Déterminer l'image d'une figure

**Exercice 5** Soit  $ABCD$  un parallélogramme de centre  $O$ . Représenter les images du parallélogramme  $ABCD$  par les transformations suivantes :

1.  $f_1 = t_{\vec{u}}$  avec  $\vec{u} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
2.  $f_2 = h_{O;3/2}$
3.  $f_3 = h_{B;-1/2}$
4.  $f_4 = r_{O;\pi/3}$
5.  $f_5 = r_{A;\pi/2}$
6.  $f_6 = s_{(BC)}$

**Exercice 6** Le plan est muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $3x - 2y - 8 = 0$

Déterminer une équation de l'image de la droite  $\Delta$  par l'homothétie de centre  $\Omega(1, 1)$  et de rapport  $-2$ .

**Exercice 7** Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux cercles sécants en  $A$  et  $B$ .

1. Montrer que les images des cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  par la rotation de centre  $A$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  sont deux cercles sécants en des points que l'on déterminera.
2. Même question avec la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$

**Exercice 8** Soit  $ABC$  un triangle direct à l'extérieur duquel on construit les carrés  $ACDE$ ,  $BAFG$  et  $CBHI$ .

1. Soit  $r_1$  la rotation de centre  $C$  d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .  
Déterminer l'image du triangle  $ACI$  par  $r_1$ .  
En déduire que  $AI = BD$  et  $(AI) \perp (BD)$
2. A l'aide de  $r_2$  rotation de centre  $B$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , montrer  
 $AH = CG$  et  $(AH) \perp (CG)$
3. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{BH}$ . On pose  $D' = t(D)$  et  $G' = t(G)$ .  
Construire les images par  $t$  des triangles  $DCB$  et  $GBC$   
Montrer que  $(IG') \parallel (CG)$  et que  $(D'H) \parallel (DB)$   
Déterminer l'orthocentre du triangle  $AHI$ .

### 8.3 Figures correspondantes par une transformation

**Exercice 9** Soit  $ABCD$  un carré de sens direct et  $I, J, K, L$  les milieux respectifs des côtés  $[AB], [BC], [CD], [DA]$ . On désigne par  $O$  le centre du carré.

1. Déterminer une transformation  $f$  par laquelle  $ABCD$  devient  $CKOJ$ .
2. Déterminer une transformation  $g$  par laquelle  $AIOI$  devient  $OKDL$ .
3. Déterminer une transformation  $h$  par laquelle  $AIOI$  devient  $OJCK$

**Exercice 10**  $ABC$  est un triangle équilatéral direct.  $A', B'$  et  $C'$  les milieux respectifs de  $[BC], [AC], [AB]$

1. Montrer que  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont même centre de gravité
2. Déterminer une transformation  $f$  telle que  $A'B'C'$  a pour image  $ABC$
3. Déterminer une transformation  $g$  telle que  $A'B'C'$  a pour image  $AB'C'$
4. Déterminer une transformation  $h$  telle que  $BA'C'$  a pour image  $C'B'A$

**Exercice 11** A l'extérieur du triangle direct  $ABC$  on construit les triangles équilatéraux  $A'BC$ ,  $B'AC$  et  $C'AB$ .

1. Déterminer une rotation qui transforme  $C$  en  $B'$  et  $C'$  en  $B$ . En déduire  $CC' = BB'$
2. Montrer que  $AA' = BB'$