Dérivation

1 Définition

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a.

Définition 2 Si f est dérivable en a on appelle nombre dérivé de f en a et on note $f'(a)$ le nombre

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 1 f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonction constante : $f : x \mapsto C$

$\forall a \in \mathbb{R} : f(a+h) = f(a) = C$. Donc d'après la remarque **??** : f est dérivable en a et $f'(a) = 0$

2.2 Fonction identité : $f : x \mapsto x$

$\forall a \in \mathbb{R} : f(a+h) = a + h = f(a) + h = f(a) + 1.h + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) = 0$.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 1$

2.3 Fonction carré : $f : x \mapsto x^2$

$\forall a \in \mathbb{R} : f(a+h) = (a+h)^2 = a + 2ah + h^2 = a + 2ah + h.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) = h$.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

2.4 Fonction cube : $f : x \mapsto x^3$

$\forall a \in \mathbb{R} : f(a+h) = (a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 = a^3 + 3a^2h + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) = 3ah + h^2$.
On a $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$

2.5 Fonction inverse : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\forall a \in \mathbb{R}^* : \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{ah(a+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$.
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

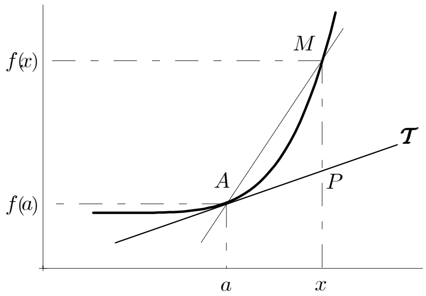
2.6 Fonction racine carrée : $f : x \mapsto \sqrt{x}$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* : \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc, si $a > 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.
En 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

3 Interprétation graphique

3.1 Tangente

$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.



Lorsque x tend vers a, le point M se rapproche de A et la droite (AM) de coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers une position limite :
la droite $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Définition 3 Si $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dérivable en a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Théorème 1 Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$\boxed{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

3.2 Meilleure approximation affine

Si f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$: $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
Le point P de $\mathcal{T}$ d'abscisse $x = a + h$ a pour ordonnée $f(a) + hf'(a)$.
Le point M de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = a + h$ a pour ordonnée $f(a+h)$.
On a donc $\overline{PM} = f(a+h) - f(a) - hf'(a) = h.\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
Lorsque h est proche de 0, les points P et M sont proches l'un de l'autre donc $f(a+h)$ est proche de $f(a) + hf'(a)$.

Définition 4 $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine locale de $f(a+h)$

Remarque 2 Lorsqu'on remplace $f(a+h)$ par $f(a) + hf'(a)$ l'erreur commise est $h\varepsilon(h)$.
Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation mais on démontre que celle fournie par la tangente est la meilleure (l'erreur commise est la plus faible).

4 Interprétation cinématique

Soit un mobile se déplaçant sur un axe.
Si $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t, $\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ est la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_0+h.
$d'(t_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

5 Fonction dérivée

Définition 5 On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
La fonction dérivée de f est la fonction notée f' qui à tout x de I associe $f'(x)$.

Exemple 1

1. La fonction $f : x \mapsto C$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 0$
2. La fonction $f : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$
3. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$
4. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 3x^2$
5. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
6. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
7. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque 3 On dit que f est dérivable sur une réunion d'intervalles **disjoints** $\mathcal{D}$ si la restriction de f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$. La fonction dérivée de f est la fonction notée f' qui à tout x de $\mathcal{D}$ associe $f'(x)$.
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

6 Opérations sur les fonctions dérivables

6.1 Somme

Théorème 2 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors $u+v$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(u+v)'=u'+v'}$$

Démonstration. Exprimer $(u+v)(a+h)$ à partir de $u(a+h)$ et $v(a+h)$

6.2 Produit

Théorème 3 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors $u.v$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(u.v)' = u'v + uv'}$$

En particulier, si $v = \lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{(\lambda u)' = \lambda u'}$

Démonstration. Exprimer $(u.v)(a+h)$ à partir de $u(a+h)$ et $v(a+h)$

Corollaire 1 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors u^n est dérivable sur I et

$$\boxed{(u^n)' = nu^{n-1}u'}$$

En particulier : $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

6.3 Inverse

Théorème 4 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall a \in I : u(a) \neq 0$. Alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

Démonstration. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}\right]$

Corollaire 2 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall a \in I : u(a) \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors u^n est dérivable sur I et

$$\boxed{(u^n)' = nu^{n-1}u'}$$

6.4 Quotient

Théorème 5 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que $\forall a \in I$: $v(a) \neq 0$. Alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Démonstration. Utiliser $u.v = u.\frac{1}{v}$ et la dérivée du produit et de l'inverse.

6.5 Composée

Théorème 6 Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si v est une fonction dérivable en tout point $u(a)$ avec $a \in I$, $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u).u'}$$

Corollaire 3 Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I et si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Corollaire 4 Une fonction paire a une dérivée impaire et une fonction impaire a une dérivée paire.

7 Applications des dérivées

7.1 Sens de variation d'une fonction

Théorème 7 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
2. Si $f' > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
3. Si $f' < 0$ sur I, sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

7.2 Extremums

Définition 6 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un point intérieur à I (c est un point de I distinct des bornes de I).

1. On dit que f présente un maximum local en c si $f(c)$ est le maximum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c.
2. On dit que f présente un minimum local en c si $f(c)$ est le minimum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c.
3. Un extremum local est un maximum local ou un minimum local.

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
f présente un maximum local en $1/3$ et un minimum local en 1.

Théorème 8 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

7.3 Equation $f(x) = 0$

Définition 7 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J si

1. $\forall x \in I : f(x) \in J$
2. $\forall \alpha \in J : \exists!\, x \in I \mid f(x) = \alpha$

Remarque 4 La deuxième propriété signifie que pour tout α de J, l'équation $f(x) = \alpha$ possède une et une seule solution dans I.

Théorème 9 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$

1. Si $\forall x \in \left]a;b\right[$ $f'(x) > 0$ alors f est une bijection de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$
2. Si $\forall x \in \left]a;b\right[$ $f'(x) < 0$ alors f est une bijection de $[a;b]$ sur $[f(b);f(a)]$

Corollaire 5 soit f une bijection strictement monotone de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$.
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left]a;b\right[$

Exemple 3 Soit l'équation $(E) : x^3 + 3x - 7 = 0$

Si on pose $f(x) = x^3 - 3x - 7$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$
On a $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$.
f est donc dérivable sur $[1;2]$ et $f' > 0$ sur $\left]1;2\right[$
Donc f est une bijection strictement croissante de $[1;2]$ sur $[-3;7]$.
$0 \in [-3;7]$ donc il existe une solution α et une seule à l'équation $f(x) = 0$.

8 Exercices

Exercice 1 Calculer la dérivée de $x \mapsto x + \sqrt{x}$

Exercice 2 Calculer la dérivée de $x \mapsto \left(x^2 - 1\right)\sqrt{x}$

Exercice 3 Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{2x^3 - 3x + 4}{5}$

Exercice 4 Calculer la dérivée de $x \mapsto \left(3x^2 - 5\right)^4$

Exercice 5 Calculer la dérivée de $x \mapsto 4x^5 + 5x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

Exercice 6 Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 1}$

Exercice 7 Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{(2x^3 - x + 1)^4}$

Exercice 8 Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Exercice 9 Calculer la dérivée de $x \mapsto 2x\sqrt{3x^2 + 5}$

Exercice 10 Dresser le tableau de variation de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Exercice 11 Soit $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3$. f admet-elle des extremums locaux ? Préciser.

Exercice 12 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer que f définit une bijection de $[-1;1]$ sur un intervalle I à déterminer.