Etude de fonctions

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x^2 - 1}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer les réels α, β, a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} : f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

2. Etudier les variations de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
4. Soit $I(0; -4)$. Le point I est-il centre de symétrie de $\mathcal{C}$?
5. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point I.
6. Tracer $\mathcal{C}$.
7. Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$2x^3 - (m+1)x^2 - 8x + m - 4 = 0$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = x(x-2)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit A le point de coordonnées $(0; 1)$.

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$ et pourquoi ?
2. Etudier les variations de la fonction f puis tracer $\mathcal{C}$.
3. Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}$ et soit $g(x) = AM^2$.
   (a) Montrer que $g'(x)$ est un polynôme de degré 3 dont on déterminera une racine évidente.
   (b) Etudier les variations de g.
   (c) Pour quelle valeur de x a-t-on $g(x)$ minimum ?
   En déduire les coordonnées du point N de $\mathcal{C}$ tel que la distance AN soit minimale.
4. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{d}$ de la tangente $\mathcal{T}$ en N à $\mathcal{C}$.
5. Montrer que $(AN) \perp \mathcal{T}$.