Produit scalaire et applications

Exercice 1 Soit $ABCD$ un carré et soit $M \in [BD]$. Soit P la projection orthogonale de M sur la droite (AB) et soit R la projection orthogonale de M sur la droite (AD).

Montrer que $(PR) \perp (CM)$.

Exercice 2 Soit OAB un triangle rectangle en O. Soit H la projection orthogonale de O sur la droite (AB).
Une droite $\mathcal{D}$ passant par A coupe la droite (OH) en M et le cercle de diamètre $[AB]$ en N.

Montrer que $AO^2 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$

Exercice 3 Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(3;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1. Montrer que le point $A\,(4;3)$ appartient à $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

Exercice 4 Montrer les égalités suivantes :

1. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ en utilisant que $\dfrac{\pi}{6} = 2\dfrac{\pi}{12}$
2. $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ en utilisant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$
3. $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{8}+\sin\dfrac{\pi}{8}}{\cos\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{\pi}{8}} = 1+\sqrt{2}$ sans se lancer dans des calculs ardus ...

Exercice 5 Dans le triangle ABC, on note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
On note $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$, $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

1. (a) Montrer que $1+\cos\hat{A} = \dfrac{2p\,(p-a)}{bc}$ et que $1-\cos\hat{A} = \dfrac{2\,(p-b)\,(p-c)}{bc}$
   (b) En déduire en fonction de a, b, c et p $\sin^2\hat{A}$ puis $\sin\hat{A}$.
2. Etablir alors la formule de Héron : $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$

Exercice 6 A l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés $BCDG$ et $ACEF$.

1. Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$
2. Montrer que les droites (AD) et (EB) sont orthogonales et que $AD = EB$.