Produit scalaire - Trigonométrie

Exercice 1 Dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ on donne le point $A\,(2;-1)$, le point $B\,(1;3)$ et la droite Δ d'équation $x+y+1=0$.

Déterminer le rayon du cercle passant par A et B et dont le centre est sur Δ.

Exercice 2 Soient f et g les fonctions définies sur $[0;\pi]$ par

$$f\,(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$
$$g\,(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

1. Montrer que $f\neq g$
2. Montrer que les restrictions à $]0;\pi[$ de f et g sont égales

Exercice 3 On pose $A=\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x$ et $B=1+\cos 2x+\cos 4x$.

1. Exprimer A en fonction uniquement de $\sin 2x$ et $\cos 2x$.
2. Exprimer B en fonction uniquement de $\cos 2x$
3. Soit $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$ définie par $f\,(x)=\dfrac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Résoudre $f\,(x)=0$

Exercice 4 $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormal direct.

Soit $\vec{v}$ le vecteur défini par $\left(\vec{i},\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et $\|\vec{v}\|=3$
Soit $\vec{w}$ le vecteur défini par $(\vec{v},\vec{w})=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\|\vec{w}\|=4$

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$.
3. Calculer $\|\vec{v}+\vec{w}\|$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,(x)=\sin x+\cos x$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}:f\,(x)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$
   En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}:f\,(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. Etudier f et construire la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.