

Etude de fonctions

1 Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition \mathcal{D}_f lorsqu'il n'est pas donné dans l'énoncé.
2. Particularités : Parité, périodicité qui peuvent réduire l'ensemble d'étude.
3. Limites aux bornes de l'ensemble d'étude. Branches infinies (Asymptotes).
4. Calcul de la dérivée (après avoir déterminé l'ensemble de dérivabilité de f) et mise sous forme simple et factorisée si possible.
5. Valeurs qui annulent la dérivée et signe de la dérivée.
6. Tableau de variations (il ne comporte que des valeurs exactes).
7. Tracer la courbe \mathcal{C}_f .
 - (a) Préciser les intersections avec les axes si cela est possible (ou faisable).
 - (b) Placer quelques points et les tangentes remarquables.

2 Rappels et compléments

2.1 Parité

1. Si f est définie sur \mathcal{D}_f et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = f(x) \end{cases}$ alors f est paire et l'axe des ordonnées est axe de symétrie de \mathcal{C}_f
2. Si f est définie sur \mathcal{D}_f et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$ alors f est impaire et l'origine du repère est centre de symétrie de \mathcal{C}_f

2.2 Période

Si f est définie sur \mathcal{D}_f et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : x + T \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(x + T) = f(x) \end{cases}$ alors f a pour période T et, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, \mathcal{C}_f est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$

2.3 Asymptotes

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote à \mathcal{C}_f .
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à \mathcal{C}_f vers $+\infty$
3. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à \mathcal{C}_f vers $-\infty$
4. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C}_f vers $+\infty$.

Remarque 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$

Remarque 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

5. Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C}_f vers $-\infty$.

Remarque 1 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$

Remarque 2 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$

Gustave EIFFEL