

Fonctions circulaires

1 Limites et dérivées remarquables

1.1 Limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère le cercle trigonométrique \mathcal{C} de centre O .

Soient A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M l'image de x sur \mathcal{C} . On a donc $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$

Soient C la projection de M sur (OA) et T le point d'intersection de (OM) avec la tangente à \mathcal{C} au point A .

On suppose que $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Le triangle (OCM) est inclus dans le secteur circulaire (OAM) lui-même inclus dans le triangle (OAT) .

Donc l'aire du triangle (OCM) est inférieure ou égale à l'aire du secteur circulaire (OAM) elle-même inférieure ou égale à l'aire du triangle (OAT) . Or :

1. L'aire du triangle (OAM) vaut $\frac{1}{2}OA \cdot CM = \frac{1}{2} \sin x$

2. L'aire du secteur angulaire (OAM) , proportionnelle à l'angle de ce secteur, vaut $\frac{1}{2}x$

Un secteur de rayon R et d'angle 2π a pour aire πR^2 .

Un secteur de rayon R et d'angle x a pour aire \mathcal{A} .

Puisqu'il y a proportionnalité, $\frac{2\pi}{x} = \frac{\pi R^2}{\mathcal{A}}$ d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}R^2x$.

3. L'aire du triangle (OAT) , qui est rectangle, vaut $\frac{1}{2}OA \cdot AT = \frac{1}{2}AT = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2} \tan x$

D'après le théorème de Thalès, $\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{AT}$ d'où $AT = \frac{CM}{OC} = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Enfin : $\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$

Après division par $\sin x$ ($\sin x \geq 0$ car $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$), multiplication par 2 et passage aux inverses

: $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

Si $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, $-x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1$ soit : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Donc, dans les deux cas : $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

De $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ on déduit alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

1.2 Dérivée de $\sin x$

Par définition, $f'(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } (\sin x)' &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos k + \sin k \cos x - \sin x}{k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin x \frac{\cos k - 1}{k} + \cos x \frac{\sin k}{k} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\cos k - 1}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{k}{2}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} k \frac{\sin^2 \frac{k}{2}}{\frac{k^2}{4}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} k \left(\frac{\sin \frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} \right)^2 = 0 \text{ puisque } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\text{Donc } (\sin x)' = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin x \frac{\cos k - 1}{k} + \cos x \frac{\sin k}{k} \right] = \cos x$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

1.3 Dérivée de $\cos x$

$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = (-1) \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ car $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$ et plus généralement : $[f(u)]' = f'(u) \cdot u'$

Donc, puisque $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$:

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

On en déduit les dérivées suivantes :

$$\boxed{[\sin(ax+b)]' = a \cdot \cos(ax+b)}$$

$$\boxed{[\cos(ax+b)]' = -a \cdot \sin(ax+b)}$$

Plus généralement, $[\sin u]' = u' \cdot \cos u$ et $[\cos u]' = -u' \cdot \sin u$

2 Etude de la fonction sinus

Soit $f(x) = \sin x$. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Donc f est impaire.

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

$\forall x \in \mathbb{R} : x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$. Donc 2π est période de f .

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc invariante par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.

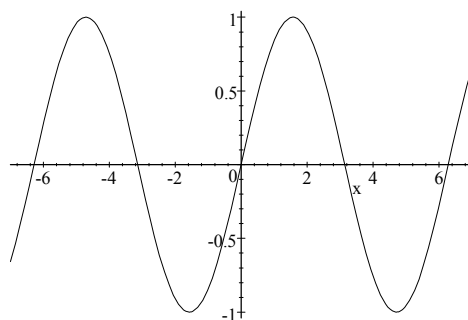
Il suffit donc d'étudier f sur $[0; \pi]$ puis de compléter par la symétrie de centre O et enfin d'utiliser l'invariance par translation de \mathcal{C}_f pour construire la courbe dans son entier.

Les valeurs aux bornes de l'intervalle d'étude $[0; \pi]$ sont $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$.

$f'(x) = \cos x$. Le signe de $\cos x$ s'étudie à l'aide du cercle trigonométrique. On constate que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\cos x > 0$ et que si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: $\cos x < 0$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	1	+	0	-	-1
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

D'où la courbe \mathcal{C}_f :



3 Etude de la fonction cosinus.

Soit $f(x) = \cos x$. f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. Donc f est paire.

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

$\forall x \in \mathbb{R} : x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$. Donc 2π est période de f .

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Il suffit donc d'étudier f sur $[0; \pi]$ puis de compléter par la symétrie d'axe Oy et enfin d'utiliser l'invariance par translation de \mathcal{C}_f pour construire la courbe dans son entier.

Les valeurs aux bornes de l'intervalle d'étude $[0; \pi]$ sont $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

$f'(x) = -\sin x$. Le signe de $\sin x$ s'étudie à l'aide du cercle trigonométrique. On constate que si $0 < x < \pi$: $\sin x > 0$ et donc $f'(x) < 0$. D'où le tableau de variations :

x	0	π
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	1	-1

D'où la courbe \mathcal{C}_f :

