



Fonctions : comparaison - opérations

1 Restriction d'une fonction

Définition 1 Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f et soit I un intervalle de \mathbb{R} inclus dans \mathcal{D}_f . La restriction de f à I est la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$

2 Comparaison de deux fonctions

2.1 Égalité de deux fonctions

Définition 2 Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g .

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g. \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(x) = g(x) \end{cases}$$

2.2 Notation $f \leq g$

Définition 3 Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g . Soit I un intervalle inclus dans \mathcal{D}_f et dans \mathcal{D}_g .

$$f \leq g \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I : f(x) \leq g(x)$$

Remarque 1 On définit de manière analogue $f \geq g$ sur I , $f < g$ sur I et $f > g$ sur I .

Interprétation graphique : $f \leq g$ sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ en dessous de \mathcal{C}_g sur I

Définition 4 On dit que f est positive sur $I \subset \mathcal{D}_f$ et on note $f \geq 0$ si $\forall x \in I : f(x) \geq 0$

$$f \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I : f(x) \geq 0$$

Interprétation graphique : La courbe représentative de la restriction de f à I est située au dessus de l'axe des abscisses.

Remarque 2 On définit de manière analogue $f > 0$ sur I , $f \leq 0$ sur I et $f < 0$ sur I

Définition 5 On dit qu'une fonction f est bornée sur un intervalle I inclus dans \mathcal{D}_f s'il existe deux nombres m et M tels que $\forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$

Remarque 3 Si $\forall x \in I : f(x) \leq M$ on dit que f est majorée sur I
Si $\forall x \in I : f(x) \geq m$ on dit que f est minorée sur I
Si f est à la fois majorée et minorée sur I , elle est bornée sur I

3 Opérations sur les fonctions

3.1 Somme

Définition 6 Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g .
La fonction $f + g$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

3.2 Multiplication par un réel

Définition 7 Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f et soit $\lambda \in \mathbb{R}$
La fonction λf est la fonction définie sur \mathcal{D}_f par $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

3.3 Produit

Définition 8 Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g .
La fonction $f \cdot g$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3.4 Quotient

Définition 9 Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g .
La fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$ par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Remarque 4 On définit la fonction inverse $\frac{1}{f}$ de manière analogue

3.5 Composition

Définition 10 Si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D}_f et \mathcal{D}_g la fonction composée $f \circ g$ est la fonction définie par

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

Remarque 5 Pour que la définition ait un sens, il faut que $x \in \mathcal{D}_g$ et que $g(x) \in \mathcal{D}_f$

Remarque 6 En général, $f \circ g \neq g \circ f$

4 Variations d'une fonction

4.1 Définitions

Définition 11 Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f et soit I un intervalle inclus dans \mathcal{D}_f .

1. On dit que f est croissante sur I lorsque $\forall (a, b) \in I^2 : a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
2. On dit que f est décroissante sur I lorsque $\forall (a, b) \in I^2 : a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
3. On dit que f est strictement croissante sur I lorsque $\forall (a, b) \in I^2 : a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
4. On dit que f est strictement décroissante sur I lorsque $\forall (a, b) \in I^2 : a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
5. On dit que f est monotone sur I si f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .
6. On dit que f est strictement monotone sur I si f est soit strictement croissante sur I , soit strictement décroissante sur I .

4.2 Monotonie et opérations

Théorème 1 Soit f monotone sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction λf est monotone sur I . Plus précisément :

Si $\lambda > 0$, f et λf sont de même monotonie.

Si $\lambda < 0$, f et λf sont de monotonie différente.

Théorème 2 Soient f et g deux fonctions qui sont de même monotonie sur I .

Alors la fonction $f + g$ est monotone sur I . Plus précisément :

Si f et g sont croissantes sur I , $f + g$ est croissante sur I .

Si f et g sont décroissantes sur I , $f + g$ est décroissante sur I .

Théorème 3 Soit f une fonction monotone sur I et g une fonction monotone sur un intervalle J tel que $\forall x \in J : g(x) \in I$. Alors :

- $f \circ g$ est croissante sur J si f et g sont de même monotonie.
- $f \circ g$ est décroissante sur J si f et g sont de monotonie différente.