Limites

1 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

1.1 Limite infinie à l'infini.

Définition 1 Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $[a;+\infty[\ (a>0)$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand. Lorsqu'on dit grand, on sous-entend positif.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty}$$

On définit de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty}$$

1.2 Limite finie à l'infini

Définition 2 Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $[a;+\infty[\ (a>0)$.
On dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ si $|f(x)|$ est aussi petit que l'on veut dès que x est assez grand. On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0}$$

Définition 3 Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $[a;+\infty[\ (a>0)$.

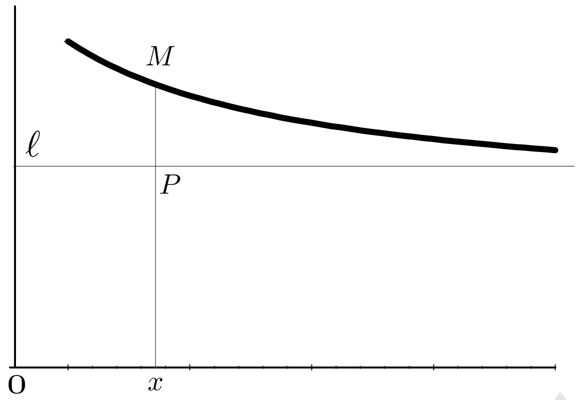
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ell]=0$$

Remarque 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow f(x)=\ell+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

Remarque 2 Une fonction n'a pas nécessairement de limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$.
Exemple : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x$

1.3 Interprétation géométrique de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance PM tend vers 0.
On dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
Interprétation analogue pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$



2 Limite en un point

2.1 Limite en 0

Définition 4 Soit f définie au moins sur un intervalle ouvert en 0. Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de 0, on dit que f a pour limite $+\infty$ en 0 et on note $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty & \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty \end{array}}$$

Définition 5 Soit f définie au moins sur un intervalle ouvert en 0. Si $|f(x)|$ est aussi petit que l'on veut dès que x est assez proche de 0, on dit que f a pour limite 0 en 0. On note $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x = 0 \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x\to 0} x^3 = 0 \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0}$$

Définition 6 Soit f définie au moins sur un intervalle ouvert en 0. On dit que f a pour limite ℓ en 0 lorsque $x \mapsto |f(x) - \ell|$ a pour limite 0 en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |f(x) - \ell| = 0$$

2.2 Limite en $a \in \mathbb{R}$

Définition 7 Soit f définie au moins sur un intervalle ouvert en a. On dit que f a une limite en a si $h \mapsto f(a+h)$ a une limite en 0 et alors :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)}$$

Remarque 3 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) = \ell + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

Définition 8 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque 4 Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si $a \geq 0$: $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$	Si P est un polynôme : $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$
Si F est une fraction rationnelle **définie en** a : $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a)$	

3 Opérations sur les limites

Les limites des fonctions f et g sont au "même point" : soit en $+\infty$, soit en $-\infty$ soit en a ($a \in \mathbb{R}$)

3.1 Somme

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim [f(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

3.2 Produit

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim [f(x).g(x)]$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

3.3 Quotient

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

$\lim f(x)$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
$\lim g(x)$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

0^+ (resp. 0^-) indique que la limite est nulle et que la fonction reste positive (resp. négative).
Il y a quatre formes indéterminées : $\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

4 Limite à l'infini d'un polynôme et d'une fraction rationnelle

4.1 Limite à l'infini d'un polynôme

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{a_n}\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n}\dfrac{1}{x^n}\right]$.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$.

4.2 Limite à l'infini d'une fraction rationnelle

Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ et soit $a_n x^n$ le terme de plus haut degré de $P(x)$ et $b_p x^p$ celui de $Q(x)$.
D'après l'étude précédente, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$

5 Exemples

Exemple 1 $\lim\limits_{x\to1}\left(2x^3-3x^2+x+1\right) = 2-3+1+1 = 1$

Exemple 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

Exemple 3 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+3} = \dfrac{2+1+1}{1-1+3} = \dfrac{4}{3}$

Exemple 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Exemple 5 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{(1-x)^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(2x)=2\\ \lim\limits_{x\to1}(1-x)^2=0\\ \forall x\in\mathbb{R}:(1-x)^2\geq0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{2x}{(1-x)^2}=+\infty$$

Autre présentation (pas toujours acceptée) : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(2x)=2\\ \lim\limits_{x\to1}(1-x)^2=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{(1-x)^2}=+\infty$

Exemple 6 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{1-x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(2x)=2\\ \lim\limits_{x\to1}(1-x)=0\\ \forall x\in\left]-\infty;1\right[:1-x>0\\ \forall x\in\left]1;+\infty\right[:1-x<0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x}{1-x}=+\infty\text{ et }\lim\limits_{x\to1+}\frac{2x}{1-x}=-\infty.$$

Autre présentation (pas toujours ...) : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(2x)=2\\ \lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to1}(1-x)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{1-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{1-x}=-\infty\end{array}\right.$

Exemple 7 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

Exemple 8 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$

x^2+x-2 est un trinôme du second degré ayant pour racines 1 et -2.
Son signe est donc donné par le tableau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3\\ \lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-2\right)=0\\ -2<x<1\Rightarrow x^2+x-2<0\\ x>1\Rightarrow x^2+x-2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}=-\infty\text{ et }\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}=+\infty$$

Autre présentation (pas toujours ...) : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3\\ \lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+x-2\right)=0^-\\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+x-2\right)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}=+\infty\end{array}\right.$