Joyeuses Pâques

Exercice 1 x et y étant deux réels non nuls, montrer que

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6\geq 0$$

Exercice 2 On se place dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, f étant de plus positive sur I.
   Montrer que f et f^2 ont même sens de variation sur I.
2. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=x^2$ et soit $A\,(0,3)$.
   Déterminer le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A

Exercice 3

1. Exprimer en fonction de $\cos 2x$:
   (a) $5\cos^2 x-3\sin^2 x$
   (b) $2\cos^2 x+3\sin^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x$
2. Montrer que $\cos^3 x+\cos^2 x\sin x+\cos x\sin^2 x+\sin^3 x=\sin x+\cos x$

Exercice 4

1. Montrer que $\forall a\in\mathbb{R} : \cos 5a=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$
2. Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R} : 16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2$
3. Montrer que $4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$. En déduire $\cos\frac{\pi}{5}$
4. Calculer les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{\pi}{10}$

Exercice 5 a, b et c étant trois réels de somme π, montrer que

$$\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=4\sin a\sin b\sin c$$

Exercice 6 Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan.

1. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD}\right)$.
2. En déduire $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$

Exercice 7 Soient A, B, C, D, E des points du plan tels que

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3} \ ; \ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{7\pi}{6} \ ; \ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Montrer que A, D et E sont alignés.

Exercice 8 Soit $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

Exercice 9 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x + 2}$

1. **Etude de la fonction f**
   (a) Trouver les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ pour $x \neq -2$
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
   (c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. **Etude d'une fonction auxiliaire g**
   Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, on pose $g(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$
   (a) Etudier les limites de g en $+\infty$, $-\infty$ et en -2.
   (b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   (c) On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère (unité graphique : 1 cm).
      i. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
      ii. Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec les axes du repère.
      iii. Tracer $\mathcal{C}_g$, ses asymptotes.
   (d) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$.
3. **Tracé de la courbe représentative de f**
   On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).
   (a) Montrer que le point $I(-2; -7)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ et préciser la position de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
   Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une deuxième asymptote que l'on précisera.
   (c) En utilisant la question 2d, déterminer suivant les valeurs de m le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ ayant pour coefficient directeur m.
   (d) Utiliser la courbe $\mathcal{C}_g$ pour déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où les tangentes ont pour coefficient directeur -2.
   (e) Tracer $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes et les tangentes trouvées en 3d.