Probabilités

Gustave EIFFEL

1 Définitions

Définition 1 On appelle univers des possibles, et on note Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (expérience dont on ne peut prédire à l'avance le résultat). Un élément de Ω est appelé événement élémentaire.

Définition 2 Un événement est un sous-ensemble (ou partie) de Ω.
L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Remarque 1 Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\varnothing$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 L'événement (A ou B) noté $A \cup B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires contenus dans A ou dans B.

Définition 4 L'événement (A et B) noté $A \cap B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires communs à A et à B.

Définition 5 L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est composé des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

Définition 6 Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Fréquence d'un événement :
Soit A un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.
La fréquence de A est $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$. L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p. Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.
Propriétés des fréquences *(qui conduisent à la définition 7):*

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé : $n_\Omega = n$
2. $f_n(A) \in [0;1]$ car $0 \leq n_A \leq n$
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

2 Probabilités

Définition 7 On appelle probabilité toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}\left(E\right) : 0 \leq P(A) \leq 1}$

2. $\boxed{P(\Omega) = 1}$

3. $\boxed{A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Remarque 2 La disposition sous forme de tableau est très pratique

$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\bar{B}$
A	$\bar{A}$	

La première colonne du tableau représente l'événement A
La première ligne du tableau représente l'événement B
Le tableau entier représente Ω

Proposition 1 $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ et $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

Théorème 1 Pour tout événement A et tout événement B, on a

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Définition 8 On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité. S'il y a équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Gustave EIFFEL