Produit scalaire

1 Définition

Rappels :

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \|\vec{u}\| = AB$
2. Si $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base **orthonormale** et si $\vec{u} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 1 On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel défini par

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]}$$

Remarque 1 Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque 2 Noter l'analogie de la formule avec $ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right]$

Théorème 1 Si $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormale et si $\vec{u} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ et $\vec{v} \left| \begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \right.$ alors :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'}$$

Démonstration. $\vec{u}+\vec{v} \left| \begin{array}{l} x+x' \\ y+y' \end{array} \right. \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$
D'où $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 - \left(x^2+y^2\right) - \left(x'^2+y'^2\right)\right] = xx' + yy'$

2 Propriétés

Théorème 2 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

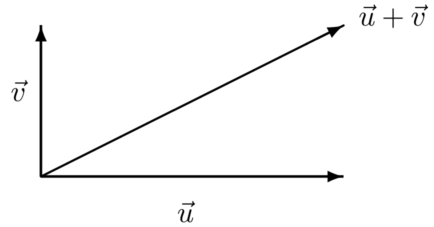
$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$
$$\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$
$$\left(\lambda.\vec{u}\right).\vec{v} = \lambda.\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \vec{u}.\left(\lambda.\vec{v}\right)$$

Démonstration. La première égalité se déduit immédiatement de la définition 1. La deuxième et la troisième se montrent à l'aide du théorème 1.

Définition 2 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0}$$

Remarque 3 Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u}.\vec{v} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

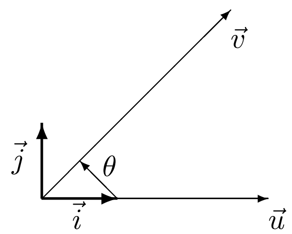


On a $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 . \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$ en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
Donc, d'après Pythagore : $(AB) \perp (BC)$

3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 3 Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

Démonstration.



Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la base orthonormale définie par $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{j}$ tel que $\left\|\vec{j}\right\| = 1$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$
Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\|\vec{u}\|, 0)$ et $\vec{v}\,(\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}))$
D'où $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos(\vec{u}, \vec{v})$ d'après le théorème 1

Remarque 4 Si α est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et si θ_p est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ on a $\alpha = |\theta_p|$.
Donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\theta_p + 2k\pi) = \cos\theta_p$
Or $\cos\alpha = \cos|\theta_p| = \begin{cases} \cos\theta_p \text{ si } \theta_p \geq 0 \\ \cos(-\theta_p) \text{ si } \theta_p \leq 0 \end{cases} = \cos\theta_p$
Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\widehat{BAC}$. On a donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \left\|\overrightarrow{AC}\right\| . \cos\widehat{BAC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \left\|\overrightarrow{AC}\right\| . \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$$

Définition 3 $\vec{u}.\vec{u}$ est le carré scalaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

Théorème 4 Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

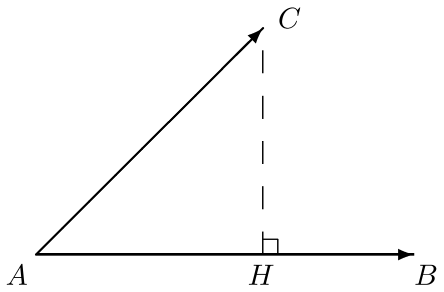
Démonstration. $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$

Théorème 5 Pour tous points A et B du plan : $\boxed{\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2 = \overline{AB}^2}$

Théorème 6 Si H est la projection orthogonale de C sur (AB) :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH}}$$

Démonstration.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HB}$.
Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de (AB). On a $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$ et $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}.\vec{i}$
D'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overline{AB}.\vec{i}.\overline{AH}.\vec{i} = \left(\overline{AB}.\overline{AH}\right)\vec{i}.\vec{i} = \overline{AB}.\overline{AH}$ car $\vec{i}.\vec{i} = 1$

4 Applications du produit scalaire

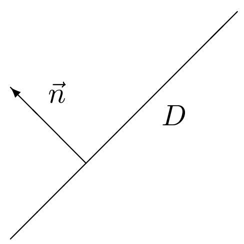
4.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale

Proposition 1 Dans une base orthonormale $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\left|\begin{array}{l}\vec{u}.\vec{i}\\ \vec{v}.\vec{j}\end{array}\right.$

Démonstration. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: $\vec{u}.\vec{i} = x$ et $\vec{u}.\vec{j} = y$ d'après le théorème 1.

4.2 Vecteur normal à une droite

Définition 4 On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.



Théorème 7 Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$

Théorème 8 Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère **orthonormal** $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Le vecteur $\vec{n}\left|\begin{array}{l}u\\ v\end{array}\right.$ est normal à $\mathcal{D}$.

Rappel. Le vecteur $\vec{d}\left|\begin{array}{c}-v\\ u\end{array}\right.$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ux+vy+w = 0$.

4.3 Cercle

Théorème 9 Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $\Omega\,(x_0; y_0)$ et de rayon R a pour équation

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

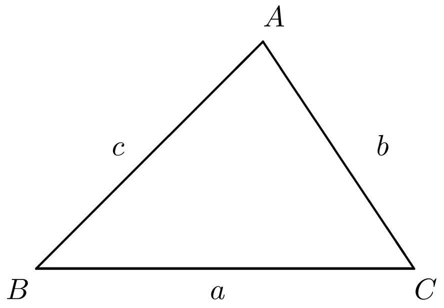
Démonstration. $M\,(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$.

Théorème 10 Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels

$$\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0}$$

Démonstration. Utiliser le fait qu'un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse.

4.4 Relations dans le triangle

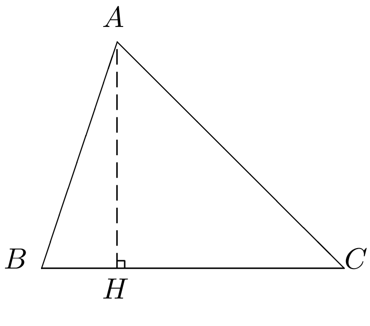


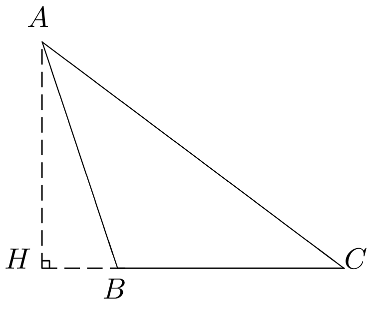
Théorème 11 (Al-Kashi et Formule des sinus) Avec les notations de la figure ci-dessus, si $\mathcal{S}$ désigne l'aire du triangle ABC et si R désigne le rayon du cercle circonscrit à ce triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{S}} = 2R$$

Remarque 5 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Démonstration. $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 + 2bc\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Or $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\left[\pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right] = -\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\cos\hat{A}$ d'où le résultat.
Soit maintenant H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.





Dans le cas où $\hat{B}$ est obtus, $AH = AB\sin\left(\pi - \hat{B}\right) = AB\sin\hat{B} = c\sin\hat{B}$
Dans le cas où $\hat{B}$ est aigu, $AH = AB\sin\hat{B} = c\sin\hat{B}$
Donc, dans tous les cas, $AH = c\sin\hat{B}$ et $\mathcal{S} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$.
D'où $\mathcal{S} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ puis le résultat (partiel) après multiplication par 2 et division par abc.

4.5 Lignes de niveau

La ligne de niveau λ de l'application f est l'ensemble des points M tels que $f(M) = \lambda$.
Quelques indications pour déterminer certaines lignes de niveau :

$f(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$	Poser $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et construire H projeté orthogonal de M sur (AB)
$f(M) = MA^2 + MB^2$	Faire intervenir I milieu de $[AB]$
$f(M) = MA^2 - MB^2$	Faire intervenir I milieu de $[AB]$
$f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$	Faire intervenir I milieu de $[AB]$

4.6 Trigonométrie

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ tels que $\left(\vec{i},\vec{u}\right) = b$ et $\left(\vec{i},\vec{v}\right) = a$.
On a $\vec{u} = \cos b.\vec{i} + \sin b.\vec{j}$ et $\vec{v} = \cos a.\vec{i} + \sin a.\vec{j}$. Donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$.
De plus $(\vec{u},\vec{v}) = \left(\vec{i},\vec{v}\right) - \left(\vec{i},\vec{u}\right) = a - b$. Donc $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(a-b)$. D'où

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b}$$

En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$ on obtient :

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a}$$

A partir de ces formules on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a.\cos b - \sin b.\cos a \\
\sin 2a &= 2\sin a.\cos a \\
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
&= 2\cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 a
\end{aligned}$$

4.7 Equations trigonométriques

$$\boxed{\cos X = \cos\alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \alpha + 2k\pi \\ X = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z})}$$

$$\boxed{\sin X = \sin\alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \alpha + 2k\pi \\ X = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z})}$$