Second degré - Polynômes

1 Trinôme du second degré

Définition 1 Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Remarque 1 Un trinôme du second degré est défini sur $\mathbb{R}$

1.1 Forme canonique du trinôme

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Démonstration.
$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

1.2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Définition 2 On appelle discriminant de $P(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ car $a \neq 0$.

1. Si $\Delta < 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc l'équation n'a pas de solution.
2. Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $x = -\frac{b}{2a}$ est racine double.
3. Si $\Delta > 0$: $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ d'où $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = 0$
   Donc $\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ d'où $\left(x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Théorème 1 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si } \Delta < 0 & \mathcal{S} = \varnothing & \\ \text{Si } \Delta = 0 & \mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\} & \text{(racine double)} \\ \text{Si } \Delta > 0 & \mathcal{S} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} & \end{array}}$$

Remarque 2 Si a et c sont de signes contraires, $\Delta > 0$

1.3 Equations se ramenant au second degré

1.3.1 Equations bicarrées

Ce sont des équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
On les résout en posant $t = x^2$

1.3.2 Equations irrationnelles

Ce sont des équations de la forme $\sqrt{f(x)} = g(x)$

On les résout grâce à l'équivalence : $\begin{cases} \sqrt{a} = b \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$ *(utiliser* $a - b^2 = (\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$*)*

On obtient alors (avec $\mathcal{D}_f$ ensemble de définition de f) : $\begin{cases} \sqrt{f(x)} = g(x) \\ x \in \mathcal{D}_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

1.4 Somme et produit des racines

Théorème 2 Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

Théorème 3 Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

1.5 Factorisation du trinôme

Théorème 4 Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors, pour tout réel x :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

1.6 Signe du trinôme

Rappel : Le signe du binôme $ax + b$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		signe contraire de a	0	signe de a	

Théorème 5 De la forme canonique du trinôme, on déduit :

1. Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ a toujours le signe de a.
2. Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ a toujours le signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ (il est alors nul).
3. Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire à l'intérieur.

Ce dernier résultat se note sous forme de tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

1.7 Interprétation géométrique

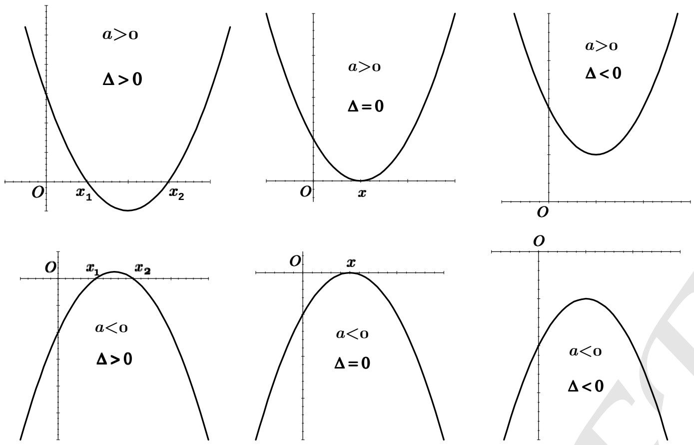
Théorème 6 La courbe $\mathcal{C}$ représentative du trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole dont la concavité est tournée vers les $y > 0$ si $a > 0$ et vers les $y < 0$ si $a < 0$.

Démonstration. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Changement de repère inspiré par la forme canonique du trinôme. Utiliser le rappel suivant :

Soit $\Omega(x_0; y_0)$ dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Si $M(x; y)$ dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\overrightarrow{\Omega M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$

Si $M(X; Y)$ dans $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$. D'où : $\boxed{\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}}$

Allures de $\mathcal{C}$ suivant le signe de a et de Δ



2 Polynômes

Définition 3 Une fonction polynôme est une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels (appelés coefficients du polynôme P) et où $n \in \mathbb{N}$.

Si $a_n \neq 0$, n est le degré de P. On note $n = \deg P$

Remarque 3 Un polynôme constant non nul ($\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = a_0 \neq 0$) a pour degré 0.
Le polynôme nul n'a pas de degré. On pose $\deg 0 = -\infty$

Remarque 4 Si P et Q sont deux polynômes non nuls. Alors $\boxed{\deg P.Q = \deg P + \deg Q}$

Théorème 7 $\boxed{P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{les coefficients de } P \text{ et } Q \text{ sont identiques} \end{cases}}$

Corollaire 1 $\boxed{\text{Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls}}$
Plus précisément, si pour tout x réel on a $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$

Définition 4 Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$.
On appelle racine (ou zéro) de P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Définition 5 On dit qu'un polynôme P est factorisable par $(x - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout x réel : $P(x) = (x - a) Q(x)$

Proposition 1 $\boxed{x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-2} x + a^{n-1}\right)}$

Théorème 8 $\boxed{a \text{ est racine de } P \Leftrightarrow P \text{ est factorisable par } (x - a)}$

Démonstration. Si a est racine de P, $P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = P(x) - P(a) = a_n (x^n - a^n) + \cdots + a_1 (x - a)$

Remarque 5 $\begin{cases} \deg P = n \\ P(x) = (x - a) Q(x) \end{cases} \Rightarrow \deg Q = n - 1$