

Suites

1 Définition

Définition 1 Une suite numérique est une application de \mathbb{N} sur \mathbb{R} : $\mathbb{N} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$
 $n \mapsto u_n$

La suite u est souvent notée (u_n) . En général, une suite est définie :

- Soit de manière explicite : on peut calculer directement u_n en fonction de n .
Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
Cas particulier : $u_n = f(n)$ où f est une fonction d'un type connu. Exemple : $u_n = \sqrt{n}$
- Soit par récurrence : On calcule u_n de proche en proche.
Exemple : u_0 est donné et $u_{n+1} = f(u_n)$

2 Suites arithmétiques et suites géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Ce sont des suites récurrentes définies par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + r$ r est la raison.

Formule explicite : $u_n = u_0 + nr$

Pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on utilise la formule explicite et le résultat suivant :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Suites géométriques

Ce sont des suites récurrentes définies par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n \times q$ q est la raison.

Formule explicite : $u_n = u_0 q^n$

Pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on utilise la formule explicite et le résultat suivant :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3 Variations des suites

3.1 Définitions

- (u_n) croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) monotone $\Leftrightarrow (u_n)$ est soit croissante soit décroissante.

3.2 Méthodes

Pour étudier les variations d'une suite, on peut :

- Comparer u_{n+1} et u_n
- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- Si $u_n > 0$ pour tout n , comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- Si $u_n = f(n)$, utiliser les variations de $x \mapsto f(x)$.

3.3 Suites bornées

- (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$
- (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$
- (u_n) est bornée si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

4 Convergence des suites numériques

Soit (u_n) une suite numérique et soit $\ell \in \mathbb{R}$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell|$ soit aussi petit que l'on veut dès que $n \geq p$, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Une suite est convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que la suite est divergente.

Exemple 1 (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \Leftrightarrow (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0.$$

Théorème 1 Soit f une fonction définie sur $[b; +\infty[$ et soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et plus généralement :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty}$$

Exemple 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et plus généralement :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0}$$

Remarque 1 Les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient énoncés pour les fonctions restent valables pour toutes les suites

4.1 Limite d'une suite géométrique

$$\boxed{\text{si } q > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{si } 0 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0}$$