Transformations

1 Généralités

Définition 1 Une transformation f du plan est une bijection du plan dans lui-même (tout point du plan possède un unique antécédent par f).

Remarque 1 Une projection sur une droite $\mathcal{D}$ n'est pas une transformation du plan.

Définition 2 Si f est une transformation du plan, la transformation réciproque de f est la transformation notée f^{-1} qui, à tout point du plan, associe son unique antécédent par f.

$$M' = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(M')$$

2 Transformations usuelles

2.1 Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
La translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation du plan notée $t_{\vec{u}}$ définie par

$$\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$$

Remarque 2 La translation de vecteur nul $t_{\vec{0}}$ est l'application identité : $Id : M \mapsto M$

Remarque 3 $\boxed{\text{Si } M' = t_{\vec{u}}(M) \text{ et } N' = t_{\vec{u}}(N) : \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}}$
En effet : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$

Théorème 1 La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$

2.2 Homothétie

Soit ω un point du plan et soit $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre ω et de rapport k est la transformation du plan notée $h_{\omega;k}$ définie par

$$\boxed{M' = h_{\omega}; k(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega M'} = k\overrightarrow{\omega M}}$$

Remarque 4 $h_{\omega;1} = Id$ et $h_{\omega;-1} = s_{\omega}$ symétrie de centre ω.

Remarque 5 $\boxed{\text{Si } M' = h_{\omega;k}(M) \text{ et } N' = h_{\omega;k}(N) : \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}}$
En effet : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\omega} + \overrightarrow{\omega N'} = -k\overrightarrow{\omega M} + k\overrightarrow{\omega N} = k\overrightarrow{MN}$

Théorème 2 La transformation réciproque de $h_{\omega;k}$ est $h_{\omega;1/k}$

2.3 Réflexion (ou symétrie orthogonale)

Soit Δ une droite du plan.
La réflexion d'axe Δ est la transformation du plan notée s_Δ définie par

$$\boxed{M' = s_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \Delta \\ \Delta \text{ médiatrice de } [MM'] \text{ si } M \notin \Delta \end{cases}}$$

Théorème 3 La transformation réciproque de s_Δ est s_Δ

Remarque 6 $\boxed{\text{Si } \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \text{ et si } A \in \Delta : \left(\overrightarrow{AM'}, \vec{u}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)}$

En effet, Δ médiatrice de $[MM']$ est bissectrice de $\widehat{MAM'}$.

2.4 Rotation

Soit ω un point du plan et soit $\theta \in \mathbb{R}$.
La rotation de centre ω et d'angle θ est la transformation du plan notée $r_{\omega;\theta}$ définie par

$$\boxed{r_\omega;\theta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \omega M' = \omega M \\ \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta \end{cases}}$$

Remarque 7 $r_{\omega;\pi} = s_\omega$ symétrie de centre ω.

Remarque 8 $\boxed{\text{Si } M' = r_{\omega;\theta}(M) \text{ et } N' = r_{\omega;\theta}(N) : \left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega N'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N}\right)}$

$\left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega N'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M}\right) + \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N}\right) + \left(\overrightarrow{\omega N}, \overrightarrow{\omega N'}\right) = -\theta + \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N}\right) + \theta = \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N}\right)$

Théorème 4 La transformation réciproque de $r_{\omega;\theta}$ est $r_{\omega;-\theta}$

3 Points invariants

Définition 3 On dit que M est invariant par f si $f(M) = M$

1. Une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ n'admet aucun point invariant
2. Une homothétie de centre ω et de rapport $k \neq 1$ admet ω comme seul point invariant.
3. Une réflexion d'axe Δ admet les points de Δ comme seuls points invariants.
4. Une rotation de centre ω et d'angle $\theta \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ admet ω comme seul point invariant.

4 Isométries

Définition 4 Une isométrie est une transformation qui conserve les distances. Cela signifie que si M et N sont deux points du plan et si $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, alors $M'N' = MN$

Théorème 5 $\boxed{\text{Les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries}}$

Démonstration.

1. Si $f = t_{\vec{u}} : \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = MN$

2. Si $f = s_\Delta$. Soient $M' = s_\Delta(M)$ et $N' = s_\Delta(N)$.
Si, dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que Δ soit l'axe des abscisses : $M(x_M;y_M)$ et $N(x_N;y_N)$, .alors $M'(x_M;-y_M)$ et $N'(x_N;-y_N)$.
D'où $M'N' = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (-y_N + y_M)^2} = MN$

3. Si $f = r_{\omega;\theta}$. Soient $M' = r_{\omega;\theta}(M)$ et $N' = r_{\omega;\theta}(N)$.
$\left(\overrightarrow{\omega M'},\overrightarrow{\omega N'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M},\overrightarrow{\omega N}\right) \Rightarrow \widehat{M'\omega N'} = \widehat{M\omega N}$.
En utilisant Al-Kashi dans les triangles ωMN et $\omega M'N'$:
$M'N'^2 = \omega M'^2 + \omega N'^2 - 2\omega M'.\omega N' \cos\widehat{M'\omega N'} = \omega M^2 + \omega N^2 - 2\omega M.\omega N \cos\widehat{M\omega N} = MN^2$

Remarque 9 Une isométrie conserve les aires
Une homothétie de rapport k les multiplie par k^2

Remarque 10 Une homothétie de centre ω et de rapport $k \neq \pm 1$ n'est pas une isométrie.
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = |k|\,MN$

5 Images de figures par une transformation usuelle

Une transformation usuelle est une translation, une homothétie, une réflexion ou une rotation.

Théorème 6 L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$

Démonstration. Si f est une isométrie :

$$M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB \Leftrightarrow A'M' + M'B' = A'B' \Leftrightarrow M' \in [A'B']$$

Si f est l'homothétie de centre ω et de rapport k :

$$\begin{aligned} M \in [AB] \Rightarrow AM + MB = AB &\Leftrightarrow \frac{1}{|k|}A'M' + \frac{1}{|k|}M'B' = \frac{1}{|k|}A'B' \\ &\Leftrightarrow A'M' + M'B' = A'B' \Leftrightarrow M' \in [A'B'] \end{aligned}$$

Théorème 7 L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$

Dans le cas d'une translation ou d'un homothétie, (AB) et $(A'B')$ sont parallèles

Démonstration.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow M \in [AB] \text{ ou } A \in [BM] \text{ ou } B \in [AM] \\ &\Leftrightarrow M' \in [A'B'] \text{ ou } A' \in [B'M'] \text{ ou } B' \in [A'M'] \Leftrightarrow M' \in (A'B') \end{aligned}$$

Dans le cas d'une translation ou d'une homothétie on a de plus $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires.

Théorème 8 Il y a conservation des milieux (si I est milieu de $[AB]$, I' est milieu de $[A'B']$).

Démonstration. L'image I' du milieu I de $[AB]$ appartient à $[A'B']$ (th. précédent)
De plus, si f est une isométrie : $IA = IB \Rightarrow I'A' = I'B'$. Donc I' milieu de $[A'B']$.
Si f est l'homothétie de centre ω et de rapport k : $IA = IB \Rightarrow I'A' = I'B'$ $(= |k|\,IA = |k|\,IB)$
I' est encore milieu de $[A'B']$.

Corollaire 1 L'image d'un parallélogramme est un parallélogramme

Démonstration. Utiliser le fait qu'un parallélogramme est caractérisé par le fait que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Théorème 9 $\boxed{\text{Il y a conservation du barycentre}}$

Démonstration. Dans le cas de l'homothétie de centre ω de rapport k.
Soit $G = bar\left\{(A,\alpha);(B,\beta)\right\}$. $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
On a $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$. D'où $\alpha\overrightarrow{GA'} + \beta\overrightarrow{GB'} = k\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$.

Dans le cas d'une isométrie : Soit I le milieu de $[AB]$. Alors : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = GI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$

$I' = f(I)$ milieu de $[A'B'] \Rightarrow \overrightarrow{G'A'}.\overrightarrow{G'B'} = G'I'^2 - \dfrac{1}{4}A'B'^2$.
$G'I' = GI$, $G'A' = GA$, $G'B' = GB$ et $A'B' = AB$ donc $\overrightarrow{G'A'}.\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$.

$$\begin{aligned}\text{On a donc } \left(\alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'}\right)^2 &= \alpha^2 G'A'^2 + \beta G'B'^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{G'A'}.\overrightarrow{G'B'} \\ &= \alpha^2 GA^2 + \beta GB^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right)^2 = 0\end{aligned}$$

Théorème 10 $\boxed{\text{L'image d'un cercle est un cercle}}$ L'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre $I' = f(I)$ et de rayon R dans le cas d'une isométrie et $|k|R$ dans le cas d'une homothétie de rapport k.

Démonstration.

1. Si f est une isométrie : $M \in \mathcal{C}(I;R) \Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow I'M' = R \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(I';R)$
2. Si f est une homothétie de rapport k :
   $M \in \mathcal{C}(I;R) \Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow |k|.IM = |k|.R \Leftrightarrow I'M' = |k|.R \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}(I';|k|.R)$

6 Image d'un angle par une transformation usuelle

Théorème 11 $\boxed{\begin{array}{l}\text{les translations, les homothéties et les rotations} \\ \text{conservent les angles orientés de vecteurs non nuls}\end{array}}$

Démonstration.

1. Si $f = t_{\vec{u}}$: $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ car $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$
2. Si $f = h_{\omega;k}$: $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$
3. Si $f = r_{\omega;\theta}$: Soit M tel que $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{AB}$
   ωMBA est un parallélogramme donc $\omega M'B'A'$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{\omega M'} = \overrightarrow{A'B'}$
   De même, si N est tel que $\overrightarrow{\omega N} = \overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{\omega N'} = \overrightarrow{C'D'}$
   D'où $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M'}; \overrightarrow{\omega N'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M}; \overrightarrow{\omega N}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

Corollaire 2 $\boxed{\text{Si } A \neq B \text{ et si } A' = r_{\omega;\theta}(A) \text{ et } B' = r_{\omega;\theta}(B) : \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta}$

Démonstration.
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}\right) + \left(\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{A'B'}\right) \\ &= -\left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{AB}\right) + \theta + \left(\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta \\ &\text{car } \left(\overrightarrow{\omega A'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{AB}\right) \text{ (théorème précédent).}\end{aligned}$$

Théorème 12 $\boxed{\text{Une réflexion change un angle orienté de vecteurs non nuls en son opposé}}$

Démonstration. Si f est la réflexion d'axe Δ :
Soit $O \in \Delta$ et soient M et N les points définis par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$.
$OMBA$ est un parallélogramme donc $OM'B'A'$ est un parallélogramme d'où $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OM'}$
De même $ONDC$ est un parallélogramme donc $ON'D'C'$ est un parallélogramme
D'où $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{ON'}$. On en déduit $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}\right)$
Or, si $\vec{i}$ est un vecteur directeur de Δ : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = -\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right)$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = -\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON'}\right)$

$$\begin{aligned}\text{D'où } \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) &= \left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{ON'}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right) \\ &= -\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = -\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\end{aligned}$$

Remarque 11 $\boxed{\text{Une transformation usuelle conserve les angles géométriques}}$
En effet, $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donc $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$

Théorème 13 $\boxed{\text{Le parallélisme et l'orthogonalité sont conservés par une transformation usuelle}}$

Démonstration. Nous savons déjà que l'image d'une droite est une droite. De plus il y a conservation des angles géométriques. D'où le résultat.

Théorème 14 $\boxed{\text{Par une transformation usuelle, il y a conservation du contact}}$ C'est à dire que deux cercles tangents sont transformés en deux cercles tangents et qu'un cercle $\mathcal{C}$ et sa tangente $\mathcal{T}$ en un point A sont transformés en un cercle $\mathcal{C}'$ et sa tangente $\mathcal{T}'$ en A'.

Démonstration. Ce résultat découle du fait que l'image d'un cercle est un cercle, que l'image d'une droite est une droite et que l'orthogonalité est conservée. ($\mathcal{T}$ tangente à $\mathcal{C}$ en $A \Leftrightarrow IA \perp \mathcal{T}$ où I est le centre du cercle).

7 Composition des transformations

Définition 5 Soient f et g deux transformations du plan. $f \circ g$ est la transformation du plan définie par $\boxed{f \circ g\,(M) = f\,[g\,(M)]}$

Théorème 15 $\boxed{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}}$

Démonstration. $\left\{\begin{array}{l} M' = t_{\vec{v}}\,(M) \\ M'' = t_{\vec{u}}\,(M') \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \\ \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v} \Rightarrow M'' = t_{\vec{u}+\vec{v}}\,(M)$

Théorème 16 $\boxed{h_{\omega;k} \circ h_{\omega;k'} = h_{\omega;k'} \circ h_{\omega;k} = h_{\omega;kk'}}$

Démonstration. $\left\{\begin{array}{l} M' = h_{\omega;k'}\,(M) \\ M'' = h_{\omega;k}\,(M') \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\omega M'} = k'\overrightarrow{\omega M} \\ \overrightarrow{\omega M''} = k\overrightarrow{\omega M'} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{\omega M''} = kk'\overrightarrow{\omega M}$

Théorème 17 $\boxed{\text{Si } \Delta \parallel \Delta' : s_\Delta \circ s_{\Delta'} = t_{2\overrightarrow{H'H}}}$ où $H \in \Delta$ et H' projeté orthogonal de H sur Δ'

Démonstration. Soit $M' = s_{\Delta'}\,(M)$; $M'' = s_\Delta\,(M')$; I et J les milieux de $[MM']$ et $[M'M'']$
$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'} \\ \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow M'' = t_{2\overrightarrow{IJ}}\,(M)$. De plus, si $H \in \Delta : \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{H'H}$

Théorème 18 $\boxed{\text{Si } \Delta \cap \Delta' = \omega : s_\Delta \circ s_{\Delta'} = r_{\omega;\theta}}$

Démonstration. Soit $M' = s_{\Delta'}(M)$; $M'' = s_\Delta(M')$. Soient $A \in \Delta - \{\omega\}$ et $B \in \Delta' - \{\omega\}$
$s_\Delta \circ s_{\Delta'}(\omega) = s_\Delta(\omega) = \omega$.
$s_{\Delta'}$ et $s_{\Delta'}$ étant des isométries : $\omega M' = \omega M$ et $\omega M'' = \omega M'$. Donc $\omega M'' = \omega M$
$\left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M''}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega B}\right) + \left(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M''}\right)$
Une réflexion transformant un angle orienté en son opposé :
$\left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega B}\right) = -\left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega B}\right)$ puisque $B \in \Delta'$ et $\left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M''}\right) = -\left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M'}\right)$ puisque $A \in \Delta$
Donc $\left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M''}\right) = -\left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega B}\right) + \left(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega A}\right) - \left(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega M'}\right) = 2\left(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega A}\right)$ d'après la relation de Chasles sur les angles orientés.
Donc $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ est la rotation de centre ω et d'angle $2\left(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega A}\right)$

Théorème 19 $\boxed{r_{\omega;\theta} \circ r_{\omega;\theta'} = r_{\omega;\theta'} \circ r_{\omega;\theta} = r_{\omega;\theta+\theta'}}$

Démonstration. Soit $M' = r_{\omega;\theta'}(M)$; $M'' = r_{\omega;\theta}(M')$. Alors : $r_{\omega;\theta} \circ r_{\omega;\theta'}(M) = M''$
$r_{\omega;\theta}$ et $r_{\omega;\theta'}$ étant des rotations de centre ω : $\omega M' = \omega M$ et $\omega M'' = \omega M'$. Donc $\omega M'' = \omega M$
$\left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M''}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}\right) + \left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M''}\right) = \theta' + \theta$
Donc $r_{\omega;\theta} \circ r_{\omega;\theta'}$ est la rotation de centre ω et d'angle $\theta + \theta'$
De même pour $r_{\omega;\theta'} \circ r_{\omega;\theta}$