Fonctions circulaires (2)

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ par

$$f(x) = x + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 2 cm).

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ l'équation

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

2. Etudier sur l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ le signe de l'expression

$$1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

4. Montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

5. Déterminer le coefficient directeur
   (a) de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-\frac{2\pi}{3}$
   (b) de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{4\pi}{3}$

6. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_3$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

7. Déterminer tous les points de $\mathcal{C}$ ayant une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x - \frac{\pi}{2}$

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution α unique dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
   En déduire que l'équation $f(x) = 0$ posséde une solution et une seule.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

9. Tracer sur un même graphique $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$.