

Etude de fonctions (2)

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -3x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{75}{8}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses, 1 mm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier les variations de f .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées.
3. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire une factorisation de $f(x)$ et les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
5. Déterminer une équation de la tangente Δ à \mathcal{C} au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
6. Déterminer tous les points de \mathcal{C} ayant une tangente parallèle à la droite Δ .
7. Montrer que le point $\Omega\left(-\frac{3}{2}; 6\right)$ est centre de symétrie de \mathcal{C} .
8. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une solution unique dans l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.
9. Tracer la courbe \mathcal{C} .