

Géométrie

1 Barycentre

1.1 Barycentre de deux points

Théorème 1 Soient A et B deux points du plan \mathcal{P} , α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un et un seul point G tel que

$$\boxed{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}}$$

Ce point est appelé barycentre des deux points pondérés (A, α) et (B, β)

On note $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta)\}$.

Si $\alpha = \beta \neq 0$ on dit que G est l'isobarycentre de A et B et on note $G = \text{isobar} \{A; B\}$

Remarque 1 L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$.

Théorème 2 $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta)\} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{P} : \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

Corollaire 1 Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, les coordonnées de $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ sont

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Théorème 3 Le barycentre de (A, α) et (B, β) est situé sur la droite (AB) .

Remarque 2 Si $k \neq 0$: $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta)\} = \text{bar} \{(A; k\alpha); (B; k\beta)\}$

1.2 Barycentre de trois ou quatre points

Théorème 4 Soient A, B et C trois points du plan, α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un et un seul point G tel que

$$\boxed{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

Ce point est appelé barycentre des trois points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta)$ et (C, γ)

On note $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$.

Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ on dit que G est l'isobarycentre de A, B, C et on note $G = \text{isobar} \{A; B; C\}$

Théorème 5 $G = \text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\} \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{P} : \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

Remarque 3 Si $k \neq 0$: $\text{bar} \{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\} = \text{bar} \{(A; k\alpha); (B; k\beta); (C; k\gamma)\}$

Remarque 4 L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC (c'est le point d'intersection des médianes).

1.3 Centre d'inertie (ou centre de gravité)

Le centre d'inertie d'une plaque homogène triangulaire est le centre de gravité de ce triangle

Si une plaque homogène admet un axe de symétrie Δ , le centre d'inertie de cette plaque est sur Δ .

Si une plaque homogène admet un centre de symétrie Ω , le centre d'inertie de cette plaque est Ω .

Si une plaque homogène P est constituée de deux plaques P_1 et P_2 de centres d'inerties respectifs G_1 et G_2 et de masses respectives m_1 et m_2 , le centre d'inertie de P est $G = \text{bar} \{(G_1; m_1); (G_2; m_2)\}$

2 Produit scalaire

2.1 Définition

Rappels :

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) signifie : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
2. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \|\vec{u}\| = AB$
3. Si (\vec{i}, \vec{j}) est une base **orthonormale** et si, dans cette base, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition 1 On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

Remarque 5 $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$.

Remarque 6 Noter l'analogie de la formule avec $ab = \frac{1}{2} [(a+b)^2 - a^2 - b^2]$

Théorème 6 Si (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormale et si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration. $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] = xx' + yy'$

2.2 Propriétés

Théorème 7 Soient \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} trois vecteurs du plan et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) \end{aligned}$$

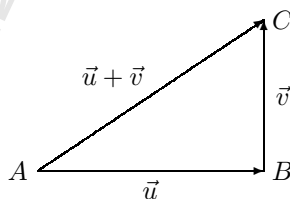
Démonstration. La première égalité se déduit immédiatement de la définition 1. La deuxième et la troisième se montrent à l'aide du théorème 6.

Définition 2 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Remarque 7 Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

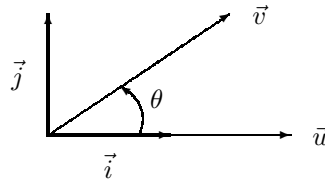


On a $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$ en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
Donc, d'après Pythagore : $(AB) \perp (BC)$

2.3 Autres expressions du produit scalaire

Théorème 8 Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

Démonstration.



Soit (\vec{i}, \vec{j}) la base orthonormale définie par $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et \vec{j} tel que $\|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$

Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , \vec{u} a pour coordonnées $(\|\vec{u}\|, 0)$ et \vec{v} $(\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}), \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}))$

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ d'après le théorème 6

Remarque 8 Si α est la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{BAC} et si θ_p est la mesure principale de (\vec{AB}, \vec{AC}) on a $\alpha = |\theta_p|$.

Donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\theta_p + 2k\pi) = \cos \theta_p$

Or $\cos \alpha = \cos |\theta_p| = \begin{cases} \cos \theta_p & \text{si } \theta_p \geq 0 \\ \cos(-\theta_p) & \text{si } \theta_p \leq 0 \end{cases} = \cos \theta_p$

Donc $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \cos \widehat{BAC}$. On a donc

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos \widehat{BAC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

Définition 3 $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est le carré scalaire de \vec{u} . On le note \vec{u}^2

Théorème 9 Pour tout vecteur \vec{u} on a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

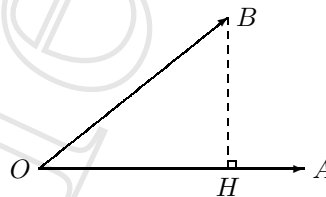
Démonstration. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$

Théorème 10 Pour tous points A et B du plan : $\boxed{\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2 = \overline{AB}^2}$

Théorème 11 Si H est la projection orthogonale de C sur (AB) :

$$\boxed{\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}}$$

Démonstration.



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HB}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HB} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ car $\vec{AB} \perp \vec{HB}$.

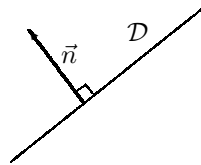
Soit \vec{i} un vecteur unitaire de (AB) . On a $\vec{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$ et $\vec{AH} = \overline{AH} \cdot \vec{i}$

D'où $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \overline{AB} \cdot \vec{i} \cdot \overline{AH} \cdot \vec{i} = (\overline{AB} \cdot \overline{AH}) \vec{i} \cdot \vec{i} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ car $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

2.4 Applications du produit scalaire

2.4.1 Vecteur normal à une droite

Définition 4 On dit qu'un vecteur \vec{n} est normal à une droite \mathcal{D} si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si \vec{n} est orthogonal à la direction de \mathcal{D} .



Théorème 12 Soit \mathcal{D} une droite passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

Théorème 13 Soit \mathcal{D} une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère **orthonormal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $\vec{n} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}$ est normal à \mathcal{D} .

Rappel. Le vecteur $\vec{d} \begin{vmatrix} -v \\ u \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} d'équation $ux + vy + w = 0$.

2.4.2 Cercle

Théorème 14 Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R a pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

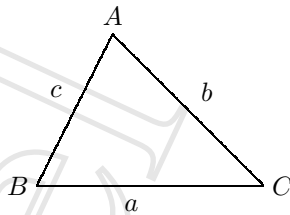
Démonstration. $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$.

Théorème 15 Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Démonstration. Utiliser le fait qu'un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse.

2.4.3 Relations dans le triangle



Théorème 16 (Al-Kashi et Formule des sinus) Avec les notations de la figure ci-dessus, si \mathcal{S} désigne l'aire du triangle ABC et si R désigne le rayon du cercle circonscrit à ce triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

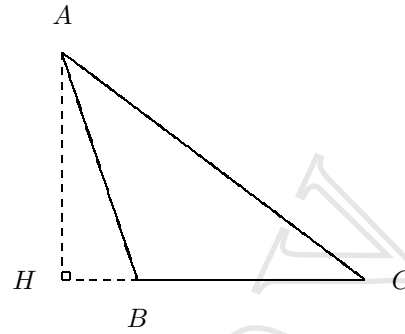
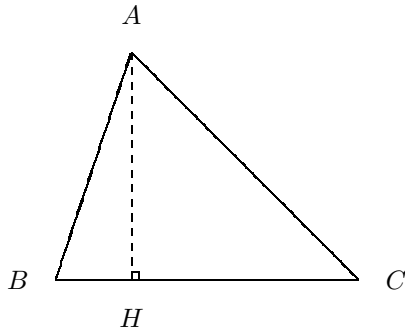
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{S}}$$

Remarque 9 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

Démonstration. $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 + 2bc \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$.

Or $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \cos[\pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})] = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\cos \hat{A}$ d'où le résultat.

Soit maintenant H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .



Dans le cas où \hat{B} est obtus, $AH = AB \sin(\pi - \hat{B}) = AB \sin \hat{B} = c \sin \hat{B}$

Dans le cas où \hat{B} est aigu, $AH = AB \sin \hat{B} = c \sin \hat{B}$

Donc, dans tous les cas, $AH = c \sin \hat{B}$ et $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$.

D'où $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ puis le résultat après multiplication par 2 et division par abc .

2.4.4 Trigonométrie

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) tels que $(\vec{i}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{i}, \vec{v}) = a$.

On a $\vec{u} = \cos b \cdot \vec{i} + \sin b \cdot \vec{j}$ et $\vec{v} = \cos a \cdot \vec{i} + \sin a \cdot \vec{j}$. Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

De plus $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u}) = a - b$. Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b)$. D'où

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

D'où $\sin(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

A partir de ces formules on déduit les suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

3 Produit vectoriel

3.1 Calcul vectoriel dans l'espace

On définit les vecteurs de l'espace de la même façon que les vecteurs du plan.

1. Si O est un point et si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires :

(a) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'ensemble \mathcal{V} des vecteurs de l'espace.

(b) $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace \mathcal{E} .

2. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de \mathcal{V} , pour tout vecteur \vec{u} il existe des réels x, y, z uniques tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(x, y, z) sont les coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y, z)$.

3. Si $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de \mathcal{E} , pour tout point M de \mathcal{E} il existe des réels x, y, z uniques tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(x, y, z) sont les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $M(x, y, z)$

Remarque : $M(x, y, z)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

4. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

5. $\left. \begin{array}{l} A(x_A; y_A; z_A) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ B(x_B; y_B; z_B) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

6. $\left. \begin{array}{l} A(x_A; y_A; z_A) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ B(x_B; y_B; z_B) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{array} \right\} \Rightarrow I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

7. $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

8. On définit le produit scalaire comme dans le plan : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

9. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

10. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale si $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

Dans ces conditions, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormal.

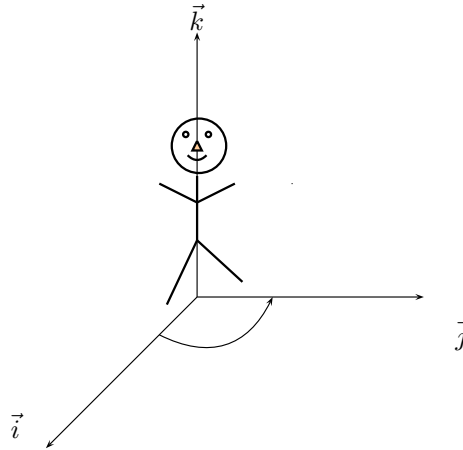
11. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormale** et si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

12. $\left. \begin{array}{l} A(x_A; y_A; z_A) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ B(x_B; y_B; z_B) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \\ (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ orthonormal} \end{array} \right\} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3.2 Orientation de l'espace

Définition 5 Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si les trois vecteurs peuvent être remplacés respectivement par les trois premiers doigts de la main droite (le pouce pour \vec{i} , l'index pour \vec{j} et le majeur pour \vec{k}), les trois doigts étant orthogonaux deux à deux.



Règle du bonhomme d'Ampère: Lorsqu'un bonhomme, placé dans le plan (\vec{i}, \vec{k}) de telle façon que le sens "pieds vers tête" de l'observateur soit celui de \vec{k} , regarde dans le sens du vecteur \vec{j} , son bras gauche indique le sens du vecteur \vec{k} .

3.3 Définition et propriétés

Définition 6 Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires
2. Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires :
 - (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v}
 - (b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
 - (c) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Théorème 17 Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et pour tout nombre réel λ :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Théorème 18 $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} colinéaires

Théorème 19 Si dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ -(xz' - x'z) \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$