

Probabilités

1 Probabilités sur un ensemble fini

1.1 Définitions

Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire (expérience dont on ne peut prédire le résultat).

Définition 1 On appelle univers des possibles, et on note Ω , l'ensemble de toutes les éventualités (résultats possibles) d'une expérience aléatoire \mathcal{E} .

Définition 2 Un événement est une partie de Ω (un ensemble d'éventualités).

Exemple 1 On lance un dé. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

L'événement A : "le résultat est pair" se note $A = \{2; 4; 6\}$

L'événement B : "le résultat est supérieur ou égal à 5" se note $B = \{5; 6\}$.

Remarque 1 Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.

Remarque 2 \emptyset est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 L'événement "A ou B" noté $A + B$ ou $A \cup B$ est l'événement constitué des éléments qui sont dans l'un **ou** l'autre des événements A et B .

Dans l'exemple 1 : $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

Définition 4 L'événement "A et B" noté $A.B$ ou $A \cap B$ est l'événement constitué des éléments qui sont à la fois dans A **et** dans B .

Dans l'exemple 1 : $A \cap B = \{6\}$

Définition 5 On note \bar{A} l'événement dont les éléments ne sont pas dans A .

Dans l'exemple 1 : $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ et $\bar{B} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Définition 6 Deux événements A et B sont dits disjoints (ou incompatibles) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Dans l'exemple 1, A et B ne sont pas disjoints car $A \cap B = \{6\}$.

Remarque 3 Les événements élémentaires sont disjoints 2 à 2 et Ω est réunion disjointe de toutes les éventualité

1.2 Fréquence d'un événement - Probabilité

Soit A un événement lié à une expérience aléatoire \mathcal{E} .

Répetons n fois cette expérience.

Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.

La fréquence de A est $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$

L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p .

Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.

Par exemple, si on lance une pièce de monnaie non truquée, la fréquence de l'événement pile tend à se stabiliser vers $\frac{1}{2}$ lorsqu'on lance la pièce un grand nombre de fois.

Propriétés des fréquences:

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé : $n_\Omega = n$
2. $f_n(A) \in [0; 1]$ car $0 \leq n_A \leq n$
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A \cup B} = n_A + n_B$.

Ces propriétés conduisent à poser la définition suivante :

Définition 7 On appelle probabilité toute application de l'ensemble des événements vers \mathbb{R} telle que :

1. Pour tout événement $A : 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A \cap B = \emptyset$, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque 4 Un événement est réunion disjointe des éventualités le composant. Donc, la probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des éventualités le composant. Dans l'exemple 1, $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$

Cas particulier : L'équiprobabilité :

Définition 8 On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\} \Rightarrow P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n)$$

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = p \Rightarrow 1 = np \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Si l'univers Ω comporte n événements élémentaires équiprobables, la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$

Soit maintenant A un événement de Ω .

$$A = \{e_1; e_2; \dots; e_p\} \Rightarrow P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_p) = \frac{p}{n}$$

p est le nombre de résultats favorables à la réalisation de A , n est le nombre de résultats possibles.

On écrit alors : S'il y a équiprobabilité: $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Remarque 5 Ω étant réunion disjointe de A et $\bar{A} : P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$. De $P(\Omega) = 1$ on déduit :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Cas particulier : Si $A = \Omega$, $\bar{A} = \emptyset$ et donc : $P(\emptyset) = 0$

Théorème 1 Pour tout événement A et tout événement B , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Disposition pratique

$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	\bar{B}
A	\bar{A}	

La première colonne du tableau représente l'événement A
 La première ligne du tableau représente l'événement B
 Le tableau entier représente Ω

On a $A \cup B = [A \cap \bar{B}] \cup [A \cap B] \cup [\bar{A} \cap B]$
 $A \cap \bar{B}$, $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ étant disjoints, on a $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
 De plus : A est réunion disjointe de $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$.
 Donc : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, d'où $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
 De même : B est réunion disjointe de $(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$
 Donc : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, d'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.
 Donc $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$