

Corrigé du devoir Probabilités - Nombres complexes

Exercice 1 Il y a équiprobabilité car l'élève est choisi au hasard.

- $P(A) = \frac{\text{nombre de garçons}}{\text{nombre d'élèves de la classe}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$
- $P(B) = \frac{\text{nombre de fumeurs}}{\text{nombre d'élèves de la classe}} = \frac{12}{35}$
- $P(A \cap B) = \frac{\text{nombre de garçons fumeurs}}{\text{nombre d'élèves de la classe}} = \frac{12-5}{35} = \frac{1}{5}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{12}{35} - \frac{1}{5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$
- Un tableau est pratique

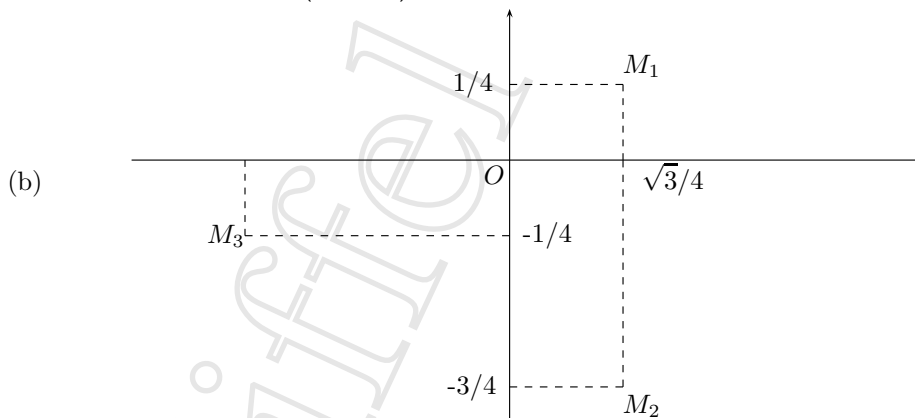
	A	\bar{A}	Total
B	7	5	12
\bar{B}	13	10	23
Total	20	15	35

$P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})] = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$ car la réunion est disjointe.

D'où $P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})] = \frac{7}{35} + \frac{10}{35} = \frac{17}{35}$

Exercice 2

- (a) $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{4} - i = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} - i = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3i}{4}$
 $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4} - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right) - \frac{1}{4}i$



$$(c) |z_3 - z_1| = \left| \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \frac{1}{4}i - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \right) \right| = \left| -1 - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$|z_3 - z_2| = \left| \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \frac{1}{4}i - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i \right) \right| = \left| -1 + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

On a $|z_3 - z_1| = M_1M_3$ et $|z_3 - z_2| = M_2M_3$

On en déduit $M_1M_3 = M_2M_3 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle de sommet M_3

$$2. \quad (a) \quad |z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si on note } \theta_1 = \arg(z_1) \text{ alors: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}/4}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Si on note } \theta_2 = \arg(z_2) \text{ alors: } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}/4}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-3/4}{\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

(b) On pourrait utiliser la réciproque du théorème de Pythagore et montrer

$$(M_1M_2)^2 = (OM_1)^2 + (OM_2)^2$$

ce qui est équivalent à

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

On peut également procéder de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}) &= (\overrightarrow{OM_2}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) \\ &= -(\vec{u}, \overrightarrow{OM_2}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = -\arg(z_2) + \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc le triangle M_1OM_2 est rectangle d'hypoténuse M_1M_2