Solutions

Solution 1 Le repère étant orthonormal, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

1. $M(x;y) \in h_B \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$
2. $M(x;y) \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 6 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$
3. $H(x;y) \in h_B \cap (AC) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - y - 5 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right.$ donc $H(2;1)$
4. H doit être milieu de $[BD]$ d'où $D(0;-5)$
5. $AH = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$ de même $CH = \sqrt{10}$
   On en déduit H milieu de $[AC]$ et donc $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
   Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution 2

1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AB}$
   $= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$
   $= -\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2. (a) $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$
   (b) D'après **1.** $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ d'où $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$
   (c) On en déduit que $H \in h_C$ et donc que les hauteurs sont concourantes.
3. (a) $x + 3y - 12 = 0$
   (b) $x = 0$
   (c) $H(0;4)$

Solution 3

1. (a) $a = -2$; $b = 3$; $R = 2$
   (b) Le centre Ω a pour coordonnées $(-2;3)$ et le rayon est $R = 2$
2. $M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y - 5 = 0$

Solution 4 *Remarque :* $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ de même : $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. (a) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\cos x - \left[\cos x \cos\frac{3\pi}{4} - \sin x \sin\frac{3\pi}{4}\right]$
   $= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right] = \sqrt{2}\cos x$
   (b) $\sin x \sin 2x + \cos 2x = \sin x(2\sin x\cos x) + \left(2\cos^2 x - 1\right) = 2\sin^2 x\cos x + 2\cos^2 x - 1$
   $= 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x + 2\cos^2 x - 1 = -2\cos^3 x + 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$
2. $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

   Dans $[0;\pi]$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$