

Solutions

Solution de l'exercice 1

- $(2 - 7i)^2 = -45 - 28i$
- $\frac{1 - i}{2 + 3i} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$
- $\frac{1}{i} + \frac{i}{1 - i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- $\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = i$

Solution de l'exercice 2

- $z = -1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$
- $z = -1 - i\sqrt{3} = \left[2; \frac{4\pi}{3} \right]$
- $z = -4i = \left[4; -\frac{\pi}{2} \right]$
- $z = -9 = [9; \pi]$

Solution de l'exercice 3

$$AB = |z_B - z_A| = |2 - 2i| = \sqrt{8}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + i| = \sqrt{10}$$

Le triangle ABC est donc isocèle de sommet C .

Il n'est pas rectangle car on n'a pas $AB^2 = BC^2 + AC^2$

Solution de l'exercice 4

- $z = 2 - 3i \Rightarrow Z = \frac{2 - 3i - 2i}{2 - 3i + 3} = \frac{2 - 5i}{5 - 3i} = \frac{25}{34} - \frac{19}{34}i$
- $\frac{z - 2i}{z + 3} = 2 - i \Rightarrow z - 2i = (z + 3)(2 - i)$
 D'où $z - 2i = (2 - i)z + 6 - 3i$ puis $z - (2 - i)z = 6 - 3i + 2i$
 On a donc $(-1 + i)z = 6 - i$ d'où $z = \frac{6 - i}{-1 + i} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$
 $S = \left\{ -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i \right\}$
- $Z = \frac{z - 2i}{z + 3} = \frac{x + iy - 2i}{x + iy + 3} = \frac{x + i(y - 2)}{(x + 3) + iy} = \frac{[x + i(y - 2)][(x + 3) - iy]}{(x + 3)^2 + y^2}$
 $= \frac{x(x + 3) + y(y - 2) + i[(x + 3)(y - 2) - xy]}{(x + 3)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 3x - 2y + i(-2x + 3y - 6)}{(x + 3)^2 + y^2}$
 $= \frac{x^2 + y^2 + 3x - 2y}{(x + 3)^2 + y^2} + i \frac{-2x + 3y - 6}{(x + 3)^2 + y^2}$
 On a donc $X = \frac{x^2 + y^2 + 3x - 2y}{(x + 3)^2 + y^2}$ et $Y = \frac{-2x + 3y - 6}{(x + 3)^2 + y^2}$
- (a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 6 = 0$
 Equation de la droite passant par $A(0; 2)$ et $B(-3; 0)$ privée du point $C(-3; 0)$ car ne pas oublier que $z \neq -3$.
- (b) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{13}{4}$
 Equation du cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{13}$