Nombres complexes

1 Définitions

Définition 1 On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ et où i est un nombre tel que $i^2 = -1$.
a est la partie réelle de z et se note $\Re(z)$
b est la partie imaginaire et se note $\Im(z)$
$a + ib$ est la forme algébrique de z.

Remarque 1 Si un nombre complexe a une partie réelle nulle, il s'écrit $z = ib$.
On dit alors que c'est un nombre imaginaire pur.
On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.
Si un nombre complexe a une partie imaginaire nulle, il s'écrit $z = a$. C'est un nombre réel.
$\forall a \in \mathbb{R} : a = a + 0.i \in \mathbb{C}$. Donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Egalité de deux complexes : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

Définition 2 Le complexe conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$

Proposition 1 $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2\Im(z)$ d'où : $\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z}$ $\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z}$

Proposition 2 $\boxed{\bar{\bar{z}} = z \quad ; \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad ; \quad \overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2 \quad ; \quad \text{si } z_2 \neq 0 : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}}$

Exercice 1 Calculer $z\bar{z}$ dans chacun des cas suivants : $z = 1-i$; $z = 2+3i$; $z = \sqrt{2}-i\sqrt{3}$; $z = a+ib$

Exercice 2 Mettre sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{1}{1+i}$; $z_2 = \dfrac{1-i}{1+2i}$; $z_3 = \dfrac{1-i}{i}$

Indication : multiplier numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur

Exercice 3 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : \dfrac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}} \in i\mathbb{R}$

1.1 Interprétation géométrique

On se place dans le plan muni d'un repère **orthonormal** $(O; \vec{u}, \vec{v})$ qu'on appelle dans cette situation plan complexe.
Si $z = a + ib$, on appelle image de z le point M d'abscisse a et d'ordonnée b.
On dit aussi que M a pour affixe z.
Si $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v}$, le complexe $z = x + iy$ est appelé affixe de $\vec{V}$.

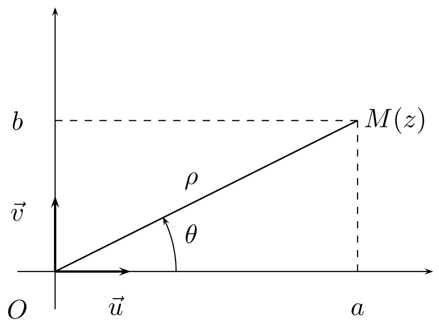
Remarque 2 L'affixe du point M est égale à l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Remarque 3 Deux points sont confondus si et seulement si ils ont même affixe.
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même affixe.

Théorème 1 Si A a pour affixe z_A et si B a pour affixe z_B alors :

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B)$

1.2 Module et Argument



$z = a + ib$

$\rho = |z| = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si $z \neq 0 : \theta = \arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

$a = \rho\cos\theta$

$b = \rho\sin\theta$

Remarque 4

1. $\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$
2. $z\bar{z} = |z|^2$
3. $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi$ et $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
4. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
5. $|-z| = |z|$ et, si $z \neq 0 : \arg(-z) = \pi + \arg(z)$
6. $|\bar{z}| = |z|$ et, si $z \neq 0 : \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

Théorème 2 Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B :

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)}$$

Démonstration. Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Si z est l'affixe de M, on a $z = z_B - z_A$. D'où $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z| = |z_B - z_A|$ et
$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z) = \arg(z_B - z_A)$

Remarque 5 On a $z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Cette dernière forme d'écriture de z est appelée forme trigonométrique .
Elle se note aussi sous forme condensée : $[\rho; \theta]$. Donc $\boxed{z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho; \theta]}$

Exercice 4 Déterminer module et argument des complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$

Exercice 5 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives $2\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 3i$ et $-\sqrt{3} - 3i$.

1. Faire une figure
2. Calculer les longueurs AB, BC et AC. Conclusion
3. Donner une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
   Indication : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$