

Dérivation

1 Notion de limite

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $0 \in I$ ou 0 est une borne de I .
On dit que f a pour limite 0 en 0 si toutes les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de 0 que l'on veut dès que x est assez proche de 0 . On note alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Par exemple, si $f(x) = x^2$, $|f(x)| < 10^{-6}$ dès que $|x| < 10^{-3}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

2. On dit que f a pour limite ℓ en 0 si la fonction $x \mapsto f(x) - \ell$ a pour limite 0 en 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - \ell] = 0 \Leftrightarrow f(x) = \ell + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$$

Par exemple, si $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} [\varphi(x) - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1$

3. On dit que f a pour limite 0 en a si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ a pour limite 0 en 0 .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = 0$$

Par exemple, si $\psi(x) = (x-1)^2$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$

4. On dit que f a pour limite ℓ en a si la fonction $h \mapsto f(a+h) - \ell$ a pour limite 0 en 0 .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - \ell] = 0 \Leftrightarrow f(x) = \ell + \psi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$$

Par exemple, si $g(x) = 1 + (x-1)^2$: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ car $g(x) = 1 + \psi(x)$ avec $\psi(x) = (x-1)^2$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 0$

1.1 Cas d'une fonction usuelle définie en a

Définition 1 On appellera fonction usuelle une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$ ou encore la somme, le produit ou le quotient de telles fonctions (par exemple une fraction rationnelle) :

Théorème 1 Si f est une fonction usuelle définie en a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple 1 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + \sqrt{2}$

f est une fonction polynôme définie en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \sqrt{2}$

De même : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3 + \sqrt{2}$

Exemple 2 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

f , fraction rationnelle, est quotient de deux fonctions polynômes et est définie en 0 .

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$.

De même : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$.

Par contre, on ne peut pas écrire $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ car f n'est pas définie en 1 .

Exemple 3 $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos 2x}$

f est définie en 0 car $\cos 0 = 1 \neq 0$ et est quotient de deux fonctions. D'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

1.2 Cas d'une fonction non définie en a .

Théorème 2 Si la fonction f n'est pas définie en a mais si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ où g est une fonction usuelle définie en a , alors f a une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemple 4 Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

f n'est pas définie en 1 mais, pour tout $x \neq 1$: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

1.3 Opérations sur les limites

Théorème 3 Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] &= \ell + \ell' & \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] &= \ell \cdot \ell' \\ \lim_{x \rightarrow a} [\lambda f(x)] &= \lambda \ell & \ell' \neq 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'} \end{aligned}$$

2 Nombre dérivé au point a

Définition 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a .

Définition 3 Si f est dérivable en a on appelle nombre dérivé de f en a et on note $f'(a)$ le nombre

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall x \neq a : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Remarque 1 f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

3 Fonctions usuelles

1. Si $f(x) = C$ et si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{C - C}{x - a} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 0$

2. Si $f(x) = x$ et si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 1$

3. Si $f(x) = x^2$ et si $a \in \mathbb{R}$: on a déjà vu que f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ et si $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{ax} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{a^2}.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

5. Si $f(x) = \sqrt{x}$ et si $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

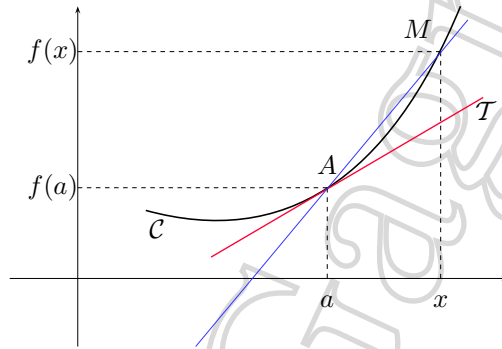
$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4 Interprétation graphique

4.1 Tangente

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.



Lorsque x tend vers a , le point M se rapproche de A et la droite (AM) de coefficient directeur $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers une position limite :

la droite \mathcal{T} de coefficient directeur $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Définition 4 Si \mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f dérivable en a , la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Théorème 4 Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

5 Interprétation cinématique

Soit un mobile se déplaçant sur un axe.

Si $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t , $\frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ est la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

$d'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 .

6 Fonction dérivée

Définition 5 On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I .

La fonction dérivée de f est la fonction notée f' qui à tout x de I associe $f'(x)$.

On dit que f est dérivable sur $I \cup J$ si f est dérivable sur chacun des intervalles I et J

f définie sur	par	est dérivable sur	et f' est définie par
\mathbb{R}	$f(x) = C$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
\mathbb{R}	$f(x) = x$	\mathbb{R}	$f'(x) = 1$
\mathbb{R}	$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$] 0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7 Opérations sur les fonctions dérivables

7.1 Somme

Théorème 5 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors $u + v$ est dérivable sur I et

$$(u + v)' = u' + v'$$

Démonstration. Exprimer $(u + v)(a + h)$ à partir de $u(a + h)$ et $v(a + h)$

7.2 Produit

Théorème 6 Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors $u.v$ est dérivable sur I et

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

Corollaire 1 Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda u)' = \lambda u'$

Corollaire 2 Si u une fonction dérivable sur un intervalle I et si $n \in \mathbb{N}$, alors u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Corollaire 3 $(x^n)' = nx^{n-1}$

7.3 Inverse

Théorème 7 Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall a \in I : u(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Corollaire 4 Si u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall a \in I : u(a) \neq 0$ et si $n \in \mathbb{Z}$, alors u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

7.4 Quotient

Théorème 8 Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que $\forall a \in I : v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

7.5 Composée

Théorème 9 Si f est une fonction dérivable en $ax + b$ la fonction g définie par $g(x) = f(ax + b)$ est dérivable en x et a pour nombre dérivé

$$g'(x) = af'(ax + b)$$

Exemple 6 Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{3x - 6}$
 On a $g(x) = f(3x - 6)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc g est dérivable pour tout x tel que $3x - 6 \in]0; +\infty[$ c'est à dire sur $]2; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 6}}$

8 Applications des dérivées

8.1 Sens de variation d'une fonction

Théorème 10 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
2. Si $f' > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
3. Si $f' < 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Définition 6

Si f est décroissante sur $[a; c]$ et croissante sur $[c; b]$, on dit que f admet un minimum local en c .
 Si f est croissante sur $[a; c]$ et décroissante sur $[c; b]$, on dit que f admet un maximum local en c .

x	a	c	b	x	a	c	b
$f'(x)$		-	+	$f'(x)$			
$f(x)$		↘	↗	$f(x)$		↗	↘

8.2 Extremums

Définition 7 Un extremum local pour une fonction est soit un minimum local soit un maximum local.

Théorème 11 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit c un point de I distinct des extrémités de I .

Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.

Exemple 7 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
 f présente un maximum local en $1/3$ et un minimum local en 1 .

Remarque 2 La réciproque du théorème est fautive. Par exemple, la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais n'admet pas d'extremum local en 0 .

8.3 Equation $f(x) = \lambda$

Théorème 12 Si f est une fonction dérivable sur $[a; b]$ et si pour tout x de $]a; b[$, $f'(x) > 0$, alors f est **strictement** croissante sur $[a; b]$ et pour tout réel $\lambda \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet **une et une seule** solution dans $[a; b]$

Théorème 13 Si f est une fonction dérivable sur $[a; b]$ et si pour tout x de $]a; b[$, $f'(x) < 0$, alors f est **strictement** décroissante sur $[a; b]$ et pour tout réel $\lambda \in [f(b); f(a)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet **une et une seule** solution dans $[a; b]$

Exemple 8 Soit l'équation (E) : $x^3 + 3x - 7 = 0$

Si on pose $f(x) = x^3 - 3x - 7$, on a f dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ sur \mathbb{R}

On a $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$.

f est donc dérivable sur $[1; 2]$ et $f' > 0$ sur $]1; 2[$

$0 \in [-3; 7]$ donc il existe une solution α et une seule à l'équation $f(x) = 0$ dans $[1; 2]$.

D'après les variations de f , l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution dans $]2; +\infty[$ ni dans $] -\infty; 1[$

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution dans \mathbb{R} (et cette solution est comprise entre 1 et 2).

9 Compléments

1. Si la variable est x , f' se note aussi $\frac{df}{dx}$. Par exemple, si $f(x) = x^2$: $\frac{df(x)}{dx} = 2x$
2. Si F est dérivable sur l'intervalle I et si $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$, on dit que F est **une** primitive de f sur I .
Par exemple : $x \mapsto x^2$ est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto 2x$. De même pour $x \mapsto x^2 + 1$