Etude de fonctions

1 Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ lorsqu'il n'est pas donné dans l'énoncé.
2. Particularités : Parité, périodicité qui peuvent réduire l'ensemble d'étude.
3. Calcul de la dérivée (après avoir déterminé l'ensemble de dérivabilité de f) et mise sous forme simple et factorisée si possible.
4. Valeurs qui annulent la dérivée et signe de la dérivée.
5. Tableau de variations (il ne comporte que des valeurs exactes).
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *Préciser les intersections avec les axes si cela est possible (ou faisable). Placer quelques points et les tangentes remarquables.*

2 Rappels et compléments

2.1 Parité - Période

1. Si f est définie sur $\mathcal{D}_f$ et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = f(x) \end{cases}$ alors f est paire et l'axe des ordonnées est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Il suffit donc d'étudier f sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathcal{D}_f$.
2. Si f est définie sur $\mathcal{D}_f$ et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : -x \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$ alors f est impaire et l'origine du repère est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Il suffit donc d'étudier f sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathcal{D}_f$.
3. Si f est définie sur $\mathcal{D}_f$ et si $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f : x + T \in \mathcal{D}_f \\ \forall x \in \mathcal{D}_f : f(x+T) = f(x) \end{cases}$ alors f a pour période T et $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T.

2.2 Changement de repère - Symétries

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

$y = f(x)$ est une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Soit $\Omega(a;b)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On a donc $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Considérons le nouveau repère $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ *(il se déduit de l'ancien par translation).*

Soit $M(x;y)$ dans $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On a donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Soit $M(X;Y)$ dans $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$. On a donc $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ on déduit : $x\vec{i} + y\vec{j} = (X+a)\vec{i} + (Y+b)\vec{j}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ étant uniques, on en déduit : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

Ce sont les formules de changement de repère par translation.
L'équation de $\mathcal{C}$ devient alors $Y + b = f(X+a)$
Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme $Y = g(X)$.
C'est une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Si g est paire, l'axe des ordonnées du repère $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$, c'est à dire la droite d'équation $x = a$ dans l'ancien repère, est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
Si g est impaire, l'origine du repère $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$, c'est à dire le point Ω, est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.