2 Exercices

Exercice 6 Calculer $\bar{z}$ et $z\bar{z}$ pour les nombres complexes z suivants :

1. $z = 3 + 4i$
2. $z = -2 - \frac{1}{3}i$
3. $z = 4 - 7i$
4. $z = 3i$
5. $z = 5$
6. $z = -\frac{1}{2} + 5i$
7. $z = \frac{1}{1 - 2i}$
8. $z = \frac{3}{3i - 5}$
9. $z = \frac{3 - 2i}{1 + 4i}$

Exercice 7 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes z suivants :

1. $z = (2 - 5i)^2 + (1 - i)^3$
2. $z = \frac{3 - 2i}{1 + i} - \frac{2 + 7i}{1 - i}$
3. $z = \left(\frac{3 - 2i}{1 + i} - \frac{2 + 7i}{1 - i}\right)^2$
4. $z = \frac{3 + 4i}{i} - \frac{2 + i}{1 + i}$
5. $z = \left(\frac{3 + 4i}{i} - \frac{2 + i}{1 + i}\right)^2$
6. $z = \frac{4 + 5i}{5 - 2i} - (2 + i)^2 + \frac{3 - i}{2 - 5i}$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1 - 2i)^2 z + \frac{4 - 3i}{i} = \frac{34i}{3i - 5} - 17 + 3i$$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} (1 + 2i) z_1 + (2 - 3i) z_2 = -2 - 9i \\ (1 - i) z_1 - (1 - 2i) z_2 = 7i \end{cases}$

Exercice 10 On pose $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = \sqrt{3} - i$; $z_C = 2\sqrt{3} + 2i$; $z_D = 2i$

1. Déterminer module et argument de chacun de ces complexes.
2. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, placer les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D et montrer que les points O, B, C, D sont sur un même cercle de centre A dont on précisera le rayon.

Exercice 11 Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = 4 + \frac{5}{2}i$; $z_B = 4 - \frac{5}{2}i$; $z_C = 2 + \frac{3}{2}i$

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
   En déduire qu'il est rectangle.
2. $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 4| = \frac{5}{2}$
   (a) A, B, C sont-ils des points de $\mathcal{E}$?
   (b) En notant Ω le point d'affixe 4, déterminer la nature de $\mathcal{E}$

Exercice 12 Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on associe au point m d'affixe $z = x + iy$ avec $(x; y) \neq (0; 1)$ le point M d'affixe $Z = \frac{z + 3}{z - i}$

1. On pose $Z = X + iY$. Déterminer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M tels que :
   (a) $Z \in \mathbb{R}$
   (b) Z imaginaire pur.

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)^2 = 0$
2. (a) Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ placer les images A et B des solutions de l'équation précédente, A désignant le point de coordonnées positives.
   Placer les points C et D tels que $ACBD$ soit un carré de diagonales AB et CD et où C a une abscisse positive.
   Déterminer par le calcul les affixes de C et D.
   (b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{5}$

Exercice 14 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z = -3i$
2. $z = -8$
3. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
4. $z = -7\sqrt{2} + 7i\sqrt{2}$
5. $z = 11\sqrt{2} - 11i\sqrt{2}$
6. $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$
7. $z = 5 + 3i$
8. $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}i$
9. $z = -5\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}i\right)$
10. $z = 13 - 39i$

Exercice 15 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z = \left[3; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $z = \left[\sqrt{2}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$
3. $z = \left[4; \dfrac{7\pi}{6}\right]$
4. $z = [1; -\pi]$
5. $z = \left[1; -\dfrac{\pi}{2}\right]$
6. $z = \left[\sqrt{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 16 Soit $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$

1. Représenter, dans le plan complexe, l'image de α.
2. Soit $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$
   Représenter, dans le plan complexe, l'image de z
   Exprimer $1 + \cos\dfrac{\pi}{4}$ en fonction de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ à l'aide de la relation $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
3. Déterminer module et argument de z

Exercice 17 Exercice identique au précédent avec $\alpha = \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}$ et $z = 1 + \alpha$