

## 5 Exercices

### 5.1 Equations et inéquations trigonométriques

**Exercice 1** Résoudre l'équation  $\cos x = 0$  sur

- |                 |   |   |
|-----------------|---|---|
| 1. $[0; 2\pi]$  | 3. $[0; 4\pi]$                                  | 5. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |
| 2. $[-2\pi; 0]$ | 4. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |   |

**Exercice 2** Résoudre l'équation  $\cos x = 1$  sur

- |                |                  |                 |
|----------------|------------------|-----------------|
| 1. $[0; 2\pi]$ | 3. $[0; 2\pi[$   | 5. $[-2\pi; 0]$ |
| 2. $]0; 2\pi]$ | 4. $[-\pi; \pi]$ |                 |

**Exercice 3** Résoudre l'équation  $\sin x = 0$  sur

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. $[0; 2\pi]$   | 3. $[0; 4\pi]$   | 5. $[-\pi; \pi]$ |
| 2. $[-\pi; \pi]$ | 4. $[\pi; 3\pi]$ |                  |

**Exercice 4** Résoudre l'équation  $\sin x = 1$  sur

- |                |                 |                   |
|----------------|-----------------|-------------------|
| 1. $[0; \pi]$  | 3. $[0; 4\pi]$  | 5. $[-\pi; 3\pi]$ |
| 2. $[0; 2\pi]$ | 4. $[-2\pi; 0]$ |                   |

**Exercice 5** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- |                             |  |                        |
|-----------------------------|--|------------------------|
| 1. $\cos x = -\frac{1}{2}$  | 3. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$                               | 5. $\cos x = 0, 721$   |
| 2. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ | 4. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 6. $\cos x = 1, 0003$  |
|                             |  | 7. $\cos 3x = -0, 824$ |

**Exercice 6** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- |                                   |   |                        |
|-----------------------------------|---|------------------------|
| 1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  | 3. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$                       | 5. $\sin x = 0, 874$   |
| 2. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ | 6. $\sin 3x = 0, 3152$ |
|                                   |   | 7. $\sin 5x = -0, 913$ |

**Exercice 7** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos 2x = \cos x$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique et donner les solutions sur

- |                  |                 |   |
|------------------|-----------------|---|
| 1. $[0; 2\pi]$   | 3. $[-2\pi; 0]$ | 4. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ |
| 2. $[-\pi; \pi]$ |                 |   |

**Exercice 8** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique et donner les solutions sur

- |                  |                 |
|------------------|-----------------|
| 1. $[0; 2\pi]$   | 3. $[0; 4\pi]$  |
| 2. $[-\pi; \pi]$ | 4. $[-2\pi; 0]$ |

**Exercice 9** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique et donner les solutions sur

1.  $[0; 2\pi]$

2.  $[-\pi; \pi]$

**Exercice 10** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique et donner les solutions sur

1.  $[0; 2\pi]$

3.  $[0; 4\pi]$

2.  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

**Exercice 11** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin 3x + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique et donner les solutions sur  $[-\pi; \pi]$ .

**Exercice 12** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $24 \cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

3.  $2 \cos^3 2x - \cos^2 2x - 5 \cos 2x - 2 = 0$

2.  $\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0$

**Exercice 13** Résoudre l'inéquation  $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  sur

1.  $[0; \pi]$

3.  $[-\pi; \pi]$

2.  $[0; 4\pi]$

4.  $[-2\pi; 0]$

**Exercice 14** Résoudre l'inéquation  $2 \cos x + \sqrt{3} < 0$  sur

1.  $[0; \pi]$

3.  $[-\pi; \pi]$

2.  $[0; 2\pi]$

4.  $[-4\pi; 0]$

**Exercice 15** Résoudre sur  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\cos 3x \geq -\frac{1}{2}$

**Exercice 16** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $-\cos^2 x - \cos x + 6 > 0$

**Exercice 17** Résoudre sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  l'inéquation  $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} > 0$

**Exercice 18** Résoudre sur  $[0; 2\pi]$  l'inéquation  $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \geq 0$

**Exercice 19** Déterminer le signe de  $f(x) = 1 - 2 \cos x$  sur  $[0; 2\pi]$

**Exercice 20** Déterminer le signe de  $f(x) = \cos x (1 + 2 \sin x)$  sur  $[0; 2\pi]$

## 5.2 Calculs de dérivées

**Exercice 21** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \cos 4x$
2.  $f(x) = 220\sqrt{2} \cos\left(100\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$
3.  $f(t) = \sin\left[2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$
4.  $f(x) = \cos^3 2x$
5.  $f(\theta) = 2 \sin^3 \theta + 4 \sin 3\theta - 5$
6.  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

**Exercice 22** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 2 \sin\left(3t - \frac{\pi}{8}\right)$ . Déterminer une relation indépendante de  $t$  entre  $f(t)$  et  $f''(t)$ .

**Exercice 23** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$  et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Déterminer une équation des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses 0 et 3.

**Exercice 24** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Déterminer les points de  $\mathcal{C}$  ayant une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = x + \sqrt{3}$ .

### 5.3 Variations et étude de fonctions

**Exercice 25** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0; \pi]$  par

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

**Exercice 26** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[-\pi; \pi]$  par

$$f(x) = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

**Exercice 27** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2\pi]$  par

$$f(x) = x - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

**Exercice 28** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0; \pi]$  par

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}x$$

**Exercice 29** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[-\pi; \pi]$  par

$$f(t) = \frac{3}{2}t - \sin 3t$$

**Exercice 30** Montrer que l'équation  $\cos x = 2x$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6} \right[$

**Exercice 31** Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 1 + 2 \cos^2 x$$

**Exercice 32** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3$

1. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de  $f$  dans le plan muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et est invariante par translation de vecteur  $2\pi\vec{i}$ .
2. Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$
3. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.