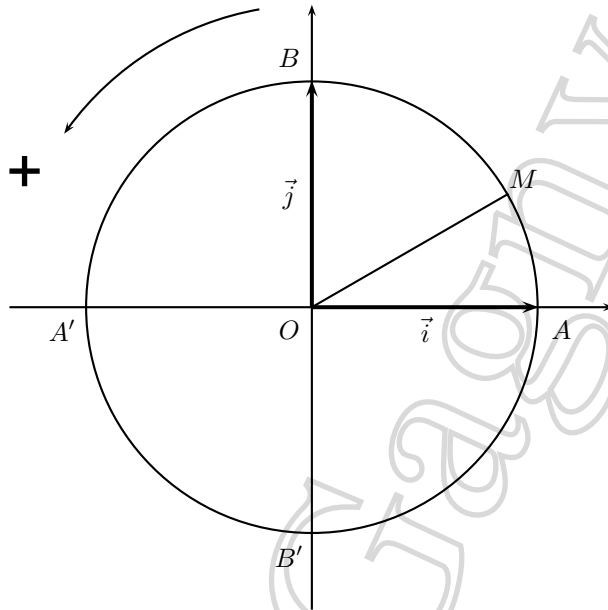


Fonctions circulaires

1 Cercle trigonométrique

Définition 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle cercle trigonométrique \mathcal{U} le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit comme sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.



A tout point M de \mathcal{U} on associe l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ainsi que l'arc orienté AM

Définition 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. L'image de x sur le cercle trigonométrique est le point de \mathcal{U} tel que la longueur de l'arc de cercle AM soit $|x|$ après avoir parcouru le cercle dans les sens direct si $x > 0$ et dans le sens indirect si $x < 0$.

Exemple 1 $\pi/2$ a pour image B ; $3\pi/2$ a pour image B' ; π a pour image A' ; $-3\pi/2$ a pour image B ; 2π a pour image A ; etc...

Remarque 1 x et $x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ont la même image sur le cercle trigonométrique.

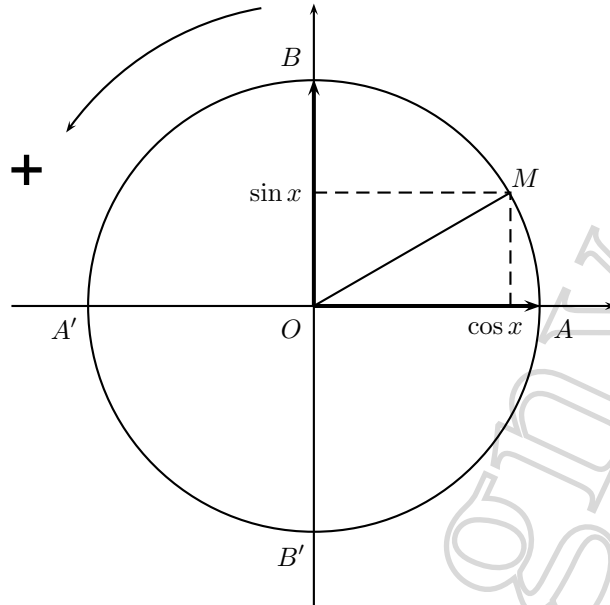
Définition 3 Si $M \in \mathcal{U}$ on appelle mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ou de l'arc orienté AM tout nombre réel x ayant pour image M sur le cercle trigonométrique \mathcal{U} .

Remarque 2 Si x est une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et si $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est également une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Parmi toutes les mesures de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Elle correspond au plus court chemin à parcourir sur \mathcal{U} pour aller de A à M .

2 Fonctions trigonométriques (ou circulaires)

Définition 4 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M l'image de x sur \mathcal{U} .

1. On appelle cosinus de x et on note $\cos x$ l'abscisse du point M .
2. On appelle sinus de x et on note $\sin x$ l'ordonnée du point M .



Remarque 3 $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

Théorème 1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Remarque 4 Retenir les valeurs correspondant à $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$ car les autres sont immédiates par lecture sur le cercle trigonométrique. Il en est de même pour π .

Théorème 2 Les fonctions sin et cos sont définies sur \mathbb{R} et sont périodiques de période 2π .

Théorème 3 La fonction sin est impaire.

Théorème 4 La fonction cos est paire.

Théorème 5 Les fonctions sin et cos sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x \\(\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}$$

Corollaire 1 Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned}(\sin(ax + b))' &= a \cos(ax + b) \\(\cos(ax + b))' &= -a \sin(ax + b)\end{aligned}$$

3 Variations des fonctions circulaires

3.1 Etude de la fonction sinus

Nous savons déjà que la fonction sin est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, la fonction sin est impaire.

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

De plus, la fonction sin est périodique de période 2π .

La courbe \mathcal{C}_f représentative de f est donc invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Il suffit donc d'étudier f sur $[0; \pi]$ puis de compléter par la symétrie de centre O et enfin d'utiliser l'invariance par translation de \mathcal{C}_f pour construire la courbe dans son entier.

Nous savons également que $(\sin x)' = \cos x$.

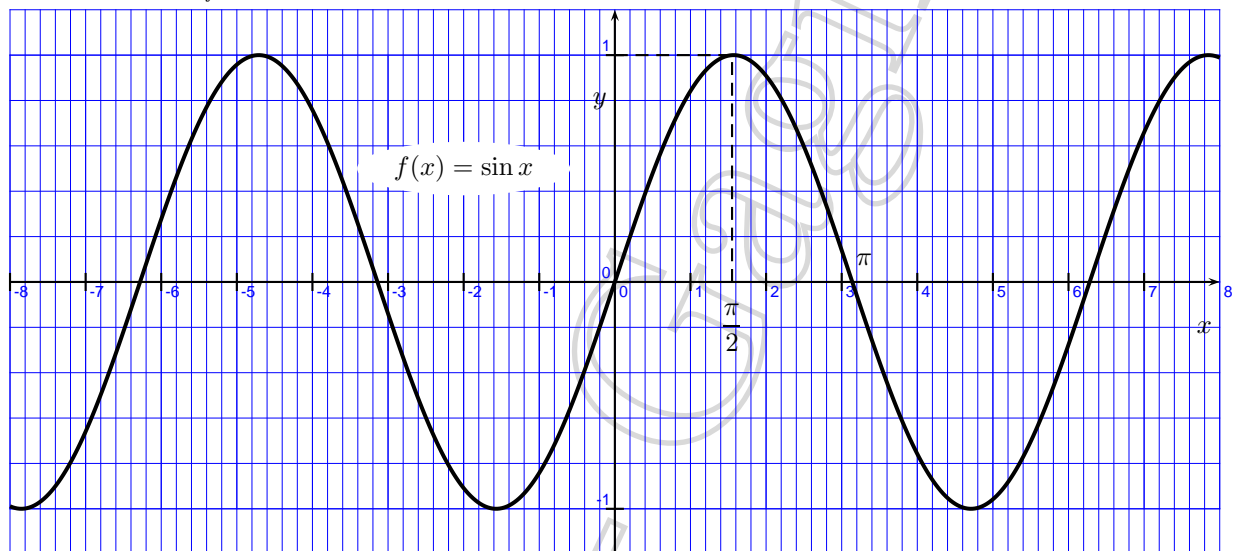
A l'aide du cercle trigonométrique, on étudie le signe de $\cos x$.

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0	$\pi/2$	π		
$\cos x$	1	+	0	-	-1
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

D'où la courbe \mathcal{C}_f :



3.2 Etude de la fonction cosinus.

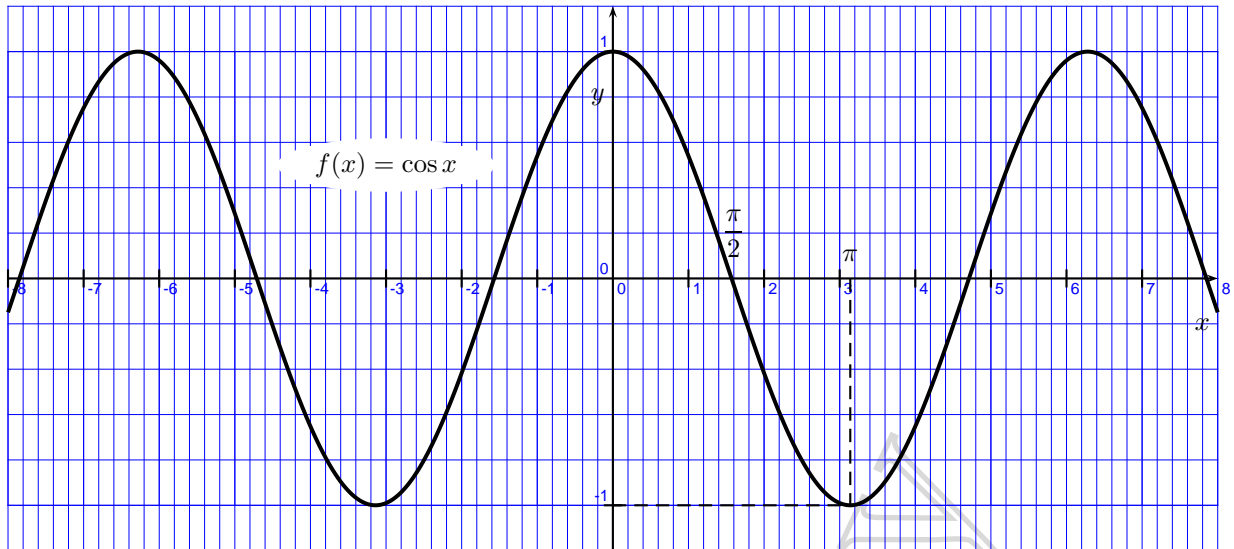
On procède comme pour la fonction sin.

$(\cos x)' = -\sin x$.

$0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow$ et donc $(\cos x)' < 0$. D'où le tableau de variations :

x	0	π	
$-\sin x$	0	-	0
$\cos x$	1	↘	-1

D'où la courbe \mathcal{C}_f :



4 Equations trigonométriques

4.1 Equation $\sin x = a$

Remarquer tout d'abord que si $a < -1$ ou $a > 1$ l'équation n'admet pas de solution.

Si $a \in [-1; 1]$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin \alpha = a$.

Donc $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$

L'étude du cercle trigonométrique conduit à :

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4.2 Equation $\cos x = b$

Cette équation n'a pas de solution si $b < -1$ ou $b > 1$.

Si $b \in [-1; 1]$ il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \beta = b$.

Donc $\cos x = b \Leftrightarrow \cos x = \cos \beta$

L'étude du cercle trigonométrique conduit à :

$$\cos x = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ x = -\beta + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$