Fonctions usuelles

1 Fonction affine

Définition 1 Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels. Dans le cas où $b = 0$, on dit que f est linéaire.

Rappel : Soit f une fonction définie sur intervalle I

1. f est strictement croissante sur I si pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

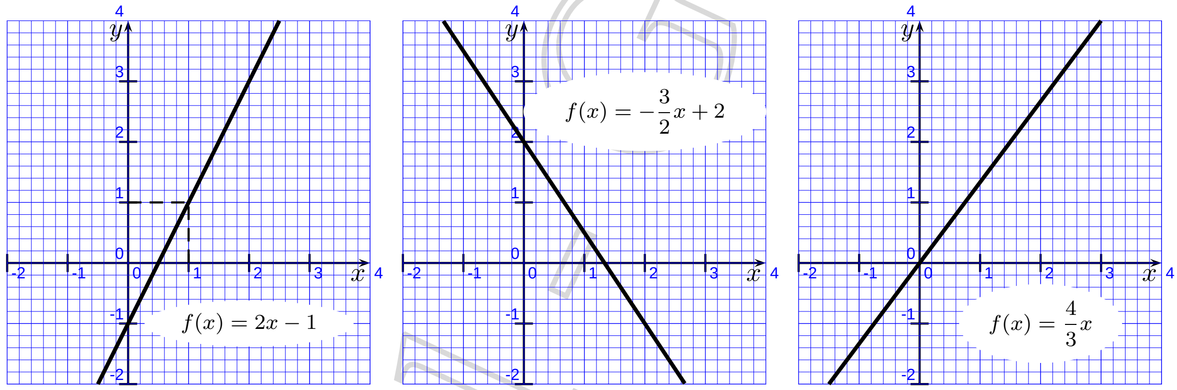
2. f est strictement décroissante sur I si pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de I :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Théorème 1 Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

1. Si $a > 0$, f est strictement croissante
2. Si $a < 0$, f est strictement décroissante
3. La représentation graphique de f est une droite de coefficient directeur (ou pente) a.

Représentation graphique



2 Fonction carré

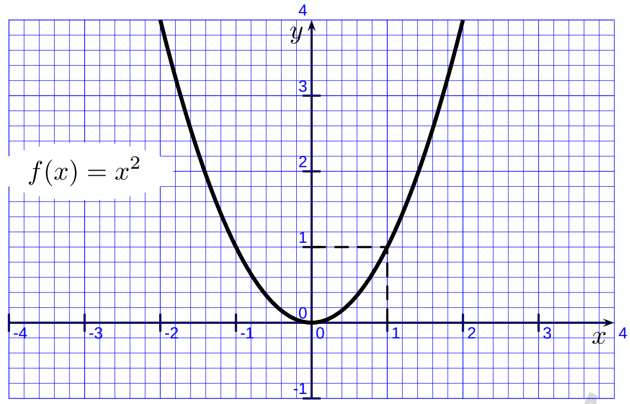
Définition 2 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Rappel : Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ est paire si pour tout $x \in \mathcal{D}$: $-x \in \mathcal{D}$ **et** $f(-x) = f(x)$
La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 2 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$
2. f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
3. La représentation graphique de f est une parabole dont l'axe des ordonnées est axe de symétrie.

Représentation graphique



3 Fonction cube

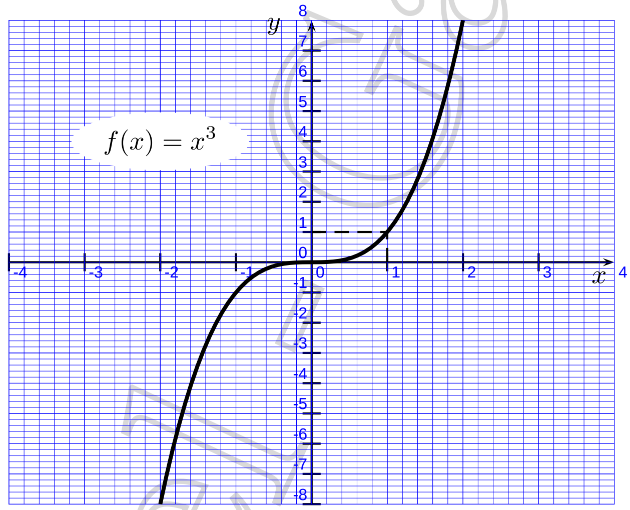
Définition 3 La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

Rappel : Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ est impaire si pour tout $x \in \mathcal{D}$: $-x \in \mathcal{D}$ **et** $f(-x) = -f(x)$
La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Théorème 3 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. f est impaire

Représentation graphique



4 Fonction inverse

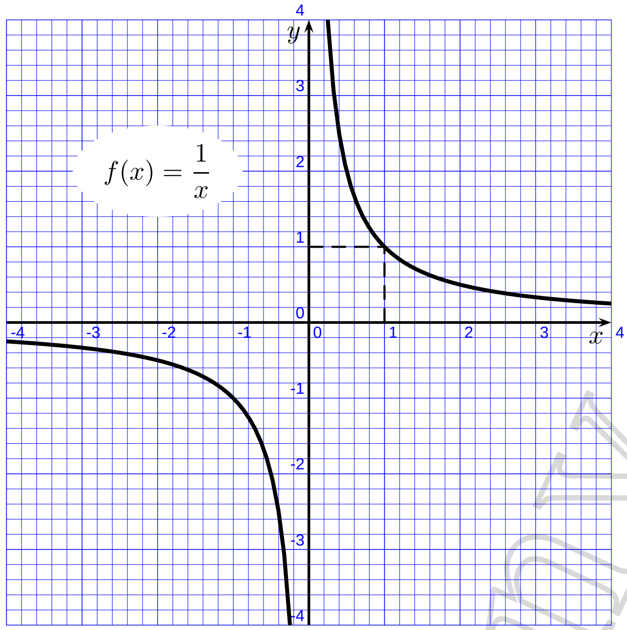
Définition 4 La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Théorème 4 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2. f est impaire.
3. La représentation graphique de f est une hyperbole d'axes les axes de coordonnées.

Remarque 1 Ne pas écrire f strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. **C'est faux.**

Représentation graphique

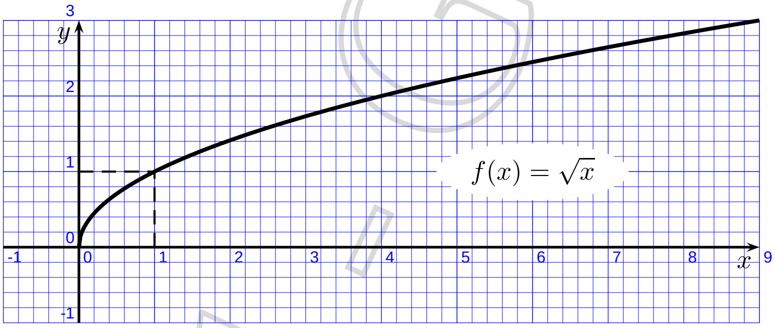


5 Fonction racine carrée

Définition 5 La fonction racine carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Théorème 5 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Représentation graphique



6 Fonction composée

6.1 Définition

Définition 6 Si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ la fonction composée $f \circ g$ est la fonction définie par

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

Remarque 2 Pour que la définition ait un sens, il faut que $x \in \mathcal{D}_g$ et que $g(x) \in \mathcal{D}_f$

Exemple 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f\left(\sqrt{1}\right) = f(1) = 5$
$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(5) = \sqrt{5}$
$f \circ g$ est définie si $x \in \mathbb{R}_+$ et $g(x) \in \mathbb{R}$. Donc $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$
$g \circ f$ est définie si $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathbb{R}_+$. Donc $g \circ f$ est définie sur $\left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$
$\forall x \in \mathbb{R}_+ : f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} + 2$
$\forall x \in \left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[: g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x+2) = \sqrt{3x+2}$

Remarque 3 En général, $f \circ g \neq g \circ f$

6.2 Sens de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 3$
$f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(x+3) = (x+3)^2$
La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc $f \circ g$ est strictement décroissante sur $]-\infty; -3]$ car $x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -3$
La fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f \circ g$ est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$ car $x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$
Plus généralement :

1. La composée de fonctions deux fonctions strictement croissantes est une fonction strictement croissante.
2. La composée de fonctions deux fonctions strictement décroissantes est une fonction strictement croissante.
3. La composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante est une fonction strictement décroissante.