Second degré - Polynômes

1 Trinôme du second degré

Définition 1 Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$.

Remarque 1 Un trinôme du second degré est défini sur $\mathbb{R}$

1.1 Forme canonique du trinôme

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

1.2 Résolution de $ax^2+bx+c=0$

Définition 2 On appelle discriminant de $P(x) = ax^2+bx+c$ le nombre $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ car $a \neq 0$.

1. Si $\Delta<0$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ donc l'équation n'a pas de solution.
2. Si $\Delta=0$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ d'où $x=-\frac{b}{2a}$ est racine double.
3. Si $\Delta>0$: $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ d'où $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}=0$
   Donc $\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$ d'où $\left(x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right.$ ou $\left.x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Théorème 1 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $ax^2+bx+c=0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \Delta<0 & \mathcal{S}=\varnothing \\ \text{Si } \Delta=0 & \mathcal{S}=\left\{-\frac{b}{2a}\right\} \quad \text{(racine double)} \\ \text{Si } \Delta>0 & \mathcal{S}=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\} \end{array}}$$

Remarque 2 Si a et c sont de signes contraires, $\Delta>0$

1.3 Somme et produit des racines

Théorème 2 Si le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2 alors

$$\boxed{S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P=x_1.x_2=\frac{c}{a}}$$

Théorème 3 Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P ils sont solutions de l'équation $X^2-SX+P=0$

1.4 Factorisation du trinôme

Théorème 4 Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 et :

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Théorème 5 Si $\Delta = 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet $-\frac{b}{2a}$ pour racine double et :

$$\forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Théorème 6 Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine et ne peut se factoriser.

1.5 Signe du trinôme

Rappel : Le signe du binôme $ax + b$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		signe contraire de a	0	signe de a	

Théorème 7 De la forme canonique du trinôme, on déduit :

1. Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ a toujours le signe de a.
2. Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ a toujours le signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ (il est alors nul).
3. Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire à l'intérieur.

Ce dernier résultat se note sous forme de tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

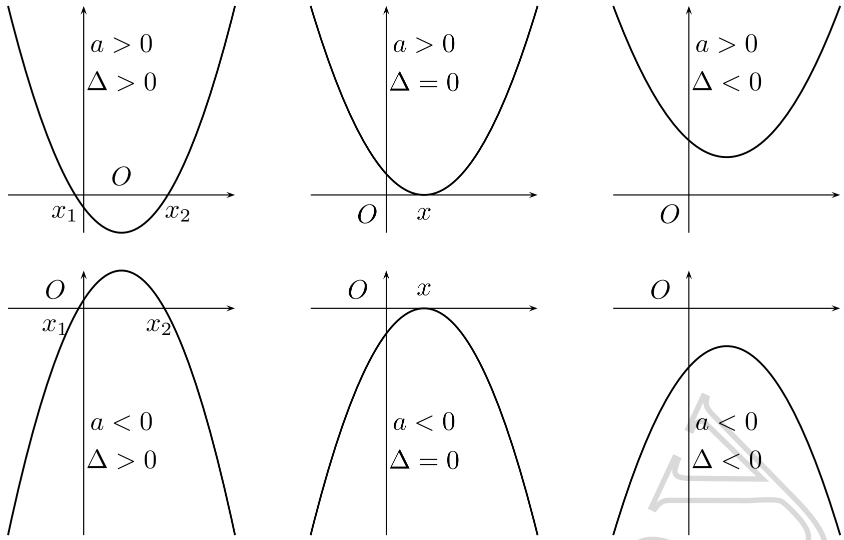
1.6 Interprétation géométrique

Théorème 8 La courbe $\mathcal{C}$ représentative du trinôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole dont la concavité est tournée vers les $y > 0$ si $a > 0$ et vers les $y < 0$ si $a < 0$.

Démonstration. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\Omega\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Changement de repère inspiré par la forme canonique du trinôme. Utiliser le rappel suivant :
Soit $\Omega(x_0; y_0)$ dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Si $M(x; y)$ dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\overrightarrow{\Omega M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$

Si $M(X; Y)$ dans $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$. D'où : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{array}\right.}$

Allures de $\mathcal{C}$ suivant le signe de a et de Δ



2 Polynômes

2.1 Généralités

L'expression $5x^4$ est un monôme de degré 4 et de coefficient 5.
De même $-7x$ est un monôme de degré1 et de coefficient -7 et $\sqrt{3}$ est un monôme de degré 0 (car $\sqrt{3} = \sqrt{3}x^0$) et de coefficient $\sqrt{3}$.
Un polynôme est une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme est le plus grand des degrés des monômes constituant le polynôme.
Les coefficients d'un polynôme sont les coefficients des monômes qui le constituent.

Exemple 1 $P(x) = 5x^3 + 2x - 9$ est un polynôme de degré 3. Le coefficient du terme de plus haut degré est 5. Le terme constant est -9.

2.2 Factorisation par $x - a$

Définition 3 On dit que a est racine du polynôme $P(x)$ lorsque $P(a) = 0$

Théorème 9 a est racine de $P(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-a)\,Q(x)$ avec $Q(x)$ polynôme.
On dit alors que $P(x)$ est factorisable par $(x-a)$.

Exemple 2 $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \\ P(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(x)$ est factorisable par $(x-2)$

Corollaire 1 Si un polynôme de degré n possède plus de n racines distinctes alors c'est le polynôme nul (polynôme dont tous les coefficients sont nuls)

Démonstration *(à titre de curiosité).* Supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ soient racines de $P(x)$.
On a par application répétée du théorème précédent :
$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,Q(x)$.
$P(x)$ étant de degré n : $Q(x)$ est nécessairement une constante. Posons $Q(x) = \lambda$.
On a donc $P(x) = \lambda(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.
$P(a_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lambda(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ car tous les autres facteurs sont non nuls.
Donc $P(x) = 0$

Définition 4 Deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.

Théorème 10 Deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si :

$$\text{Pour tout réel } x : P(x) = Q(x)$$

Remarque 3 Deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si pour tout x d'un intervalle I de $\mathbb{R}$: $P(x) = Q(x)$

Exemple 3 Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont les polynômes définis par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $Q(x) = x^2 - 1$, ces deux polynômes seront égaux si et seulement si $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ et $d = -1$.

2.2.1 Méthode des coefficients indéterminés

Soit $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$.
$P(1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-1)\,Q(x)$
Le degré de $P(x)$ étant 3, celui de $Q(x)$ est 2. Donc $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Donc $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = ax^3 + (b-a)\,x^2 + (c-b)\,x - c \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \\ 3 = b - a \\ -4 = c - b \\ -1 = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Donc $P(x) = (x-1)\left(2x^2 + 5x + 1\right)$
La factorisation n'est peut être pas terminée car on peut éventuellement factoriser $2x^2 + 5x - 1$.
Ce n'est pas le cas car $\Delta < 0$.

2.2.2 Méthode de la division

1. $$\begin{array}{l|l} \boxed{2x^3}+3x^2-4x-1 & \boxed{x}-1 \\ \cline{2-2} & \boxed{2x^2} \end{array}$$ On divise les termes de plus haut degré : $\dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$

2. $$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2-4x-1 & \boxed{x-1} \\ \cline{2-2} \boxed{2x^3-2x^2} & \boxed{2x^2} \end{array}$$ On multiplie $2x^2$ par $(x-1)$. On obtient $2x^3 - 2x^2$

3. $$\begin{array}{l|l} \boxed{2x^3+3x^2-4x-1} & x-1 \\ \cline{2-2} \boxed{2x^3-2x^2} & 2x^2 \\ \qquad \boxed{5x^2-4x-1} & \end{array}$$ On soustrait $\left(2x^3 + 3x^2 - 4x - 1\right) - \left(2x^3 - 2x^2\right) = 5x^2 - 4x - 1$

4. $$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-4x-1 & x-1 \\ \hline 2x^3-2x^2 \qquad\qquad & 2x^2+5x \\ 5x^2-4x-1 & \\ 5x^2-5x \quad\;\; & \\ x-1 & \end{array}$$ On recommence avec $\dfrac{5x^2}{x} = 5x$

5. $$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2-4x-1 & x-1 \\ \hline 2x^3-2x^2 \qquad\qquad & 2x^2+5x+1 \\ 5x^2-4x-1 & \\ 5x^2-5x \quad\;\; & \\ x-1 & \\ x-1 & \\ 0 & \end{array}$$ On multiplie $5x$ par $(x-1)$ puis on soustrait
On obtient 0 en reste
C'est fini :
$2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)\left(2x^2 + 5x + 1\right)$