Suites arithmétiques et géométriques

1 Suites numériques

Définition 1 Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Notations : $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$

u_n est le terme de rang n ; (u_n) est la suite ayant u_n comme terme de rang n.
En général, une suite est définie :

- Soit de manière explicite : on peut calculer directement u_n en fonction de n.
  Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
  Cas particulier : $u_n = f(n)$ où f est une fonction d'un type connu. Exemple : $u_n = \sqrt{n}$
- Soit par récurrence :
  On calcule u_n de proche en proche à l'aide d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Exemple (u_n) suite de premier terme $u_1 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On a donc de proche en proche :
  $u_2 = 2 \times 1 + 3 = 5$; $u_3 = 2 \times 5 + 3 = 13$; $u_4 = 2 \times 13 + 3 = 29$ etc...

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Ce sont des suites définies par la relation de récurrence $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ r est la raison.
Une suite arithmétique est caractérisée par son premier terme et sa raison.

Exemple 1 La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Remarque 1 Pour montrer qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r, il suffit de montrer que pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = r$

2.2 Expression de u_n en fonction de n et de r

Si le premier terme est u_0 et la raison r :

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr \Rightarrow \quad u_n = u_0 + nr$$

Si le premier terme est u_1 et la raison r :

$$\left.\begin{array}{r} u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \\ u_n = u_{n-1} + r \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + (n-1)\,r \Rightarrow \quad u_n = u_1 + (n-1)\,r$$

Remarque 2 $\boxed{u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison})}$

2.3 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 1 $\boxed{1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}}$

Démonstration. Posons $S_n=1+2+3+\cdots+n$
Ecrivons les termes composant S_n de gauche à droite puis de droite à gauche et additionnons :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

d'où le théorème.

Calculons maintenant $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$
Ecrivons chaque terme en fonction de u_0 et de r et ajoutons les égalités obtenues
$u_0=u_0$
$u_1=u_0+r$
$u_2=u_0+2r$
$\vdots$
$u_n=u_0+nr$

$S=(n+1)\,u_0+(1+2+3+\cdots+n)\,r=(n+1)\,u_0+\dfrac{n\,(n+1)}{2}r=(n+1)\left(u_0+\dfrac{nr}{2}\right)$
$S=(n+1)\left(\dfrac{2u_0+nr}{2}\right)=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_0+nr}{2}\right)=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$
Si on veut calculer $S=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ dans le cas où le premier terme est u_1, la même méthode conduit à $S=n\dfrac{u_1+u_n}{2}$

Remarque 3 $\boxed{S=(\text{nombre de termes})\left(\dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\right)}$ premier terme et dernier terme désignant respectivement le premier terme de la somme et le dernier terme de la somme

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Ce sont des suites définies par la relation de récurrence $\boxed{u_{n+1}=q\times u_n}$ q est la raison.
Une suite géométrique est caractérisée par son premier terme et sa raison.
Nous supposerons dans la suite que le premier terme ainsi que la raison sont non nuls.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\neq 0$

Exemple 2 La suite de terme général $u_n=2^n$ est une suite géométrique de raison 2.

Remarque 4 Pour montrer qu'une suite (u_n) est une suite géométrique de raison q, il suffit de montrer que pour tout entier n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$

3.2 Expression de u_n en fonction de n et de r

Si le premier terme est u_0 et la raison r :

$$\left.\begin{array}{r} u_1=q\times u_0 \\ u_2=q\times u_1 \\ \\ u_n=q\times u_{n-1} \end{array}\right\}\Rightarrow u_1\times u_2\times\cdots\times u_n=q^n\times u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n-1}\Rightarrow\quad u_n=q^n\times u_0$$

Si le premier terme est u_1 et la raison r :

$$\left.\begin{array}{r} u_2 = q \times u_1 \\ u_3 = q \times u_2 \\ \\ u_n = q \times u_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 \times u_3 \times \cdots \times u_n = q^{n-1} \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \Rightarrow \quad u_n = q^{n-1} \times u_1$$

Remarque 5 $\boxed{u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}}$

3.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 2 Si $q \neq 1$: $\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Démonstration. Soit $\mathcal{S}_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$
$q\mathcal{S}_n = q\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$
Doù $\mathcal{S}_n - q\mathcal{S}_n = 1 - q^{n+1}$ puis $\mathcal{S}_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Calculons maintenant $\mathcal{S} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
$\mathcal{S} = u_0 + (u_0 \times q) + \left(u_0 \times q^2\right) + \cdots + (u_0 \times q^n) = u_0\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)$
D'après le théorème précédent, on en déduit : $\mathcal{S} = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Si on veut calculer $\mathcal{S} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ dans le cas où le premier terme est u_1, la même méthode conduit à $\mathcal{S} = u_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Remarque 6 $\boxed{\mathcal{S} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}}$ premier terme et dernier terme désignant respectivement le premier terme de la somme et le dernier terme de la somme