BTS Groupement B Session 2005

Exercice 1 (11 points) Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

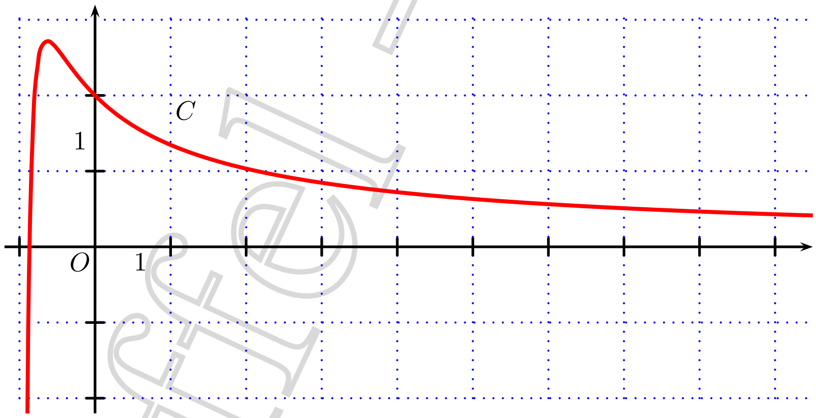
$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$(1+x)\,y' + y = 0$$
sont les fonctions définies par $h(x) = \dfrac{k}{x+1}$ où k est une constante réelle quelconque.
2. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x}$
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. (a) Démontrer que, pour tout x de $]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

   (b) Résoudre dans $]-1;+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geq 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1;+\infty[$.

   (c) Etablir le tableau de variation de f.

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :
$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.
   (a) En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$G(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$
2. En déduire qu'une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est définie par :
$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$
3. (a) On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.
   (b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.
   (c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au (b)

Exercice 2 (9 points) Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.
Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle $[89,6;90,4]$.

1. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type $\sigma = 0,17$. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : Il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart-type σ_1.
Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

B. Loi binomiale

On note E l'événement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_1 qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.
On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.
On considère la variable aléatoire Y_2 qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.
On admet que la variable aléatoire Y_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,02$. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y_2 par la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 4,43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer $P(Z \leq 15,5)$

D. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une grosse livraison à effectuer.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.
La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0,17$.
On désigne par $\bar{X}_2$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 90$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 90$.
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1. Enoncer règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$P\left(89,967 \leq \bar{X}_2 \leq 90,033\right) = 0,95$$

2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\bar{x} = 90,02$.
Peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?