BTS blanc 2004

Exercice 1 (8 points) Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type d'article pour le bâtiment. On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts : un défaut a et un défaut b.

A. Evénements indépendants.

On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement : "l'article présente le défaut a".
On note B l'événement : "l'article présente le défaut b".
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 : "l'article présente le défaut a et le défaut b".
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 : "l'article présente au moins un des deux défauts".
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 : "l'article ne présente aucun défaut".
4. Calculer la probabilité de l'événement E_4 : "l'article présente un seul des deux défauts".

On admet que si les événements A et B sont indépendants alors les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants et les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Dans les parties B et C tous les résultats approchés seront à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale et loi de Poisson.

Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 100.
On prélève au hasard un lot de 100 articles dans la production d'une journée.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 100 articles.
On suppose que la probabilité de l'événement D : "l'article est défectueux" est $P(D) = 0,05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 3)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus trois articles défectueux dans le lot.
4. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de même espérance mathématique. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
5. On note Y une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ où λ est le résultat du **4.** Calculer $P(Y = 3)$ et $P(Y \leq 3)$.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Les articles sont mis en place dans les hypermarchés par lots de 800.
On prélève au hasard un lot de 800 articles dans un stock important.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 800 articles.
On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 800 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 800 articles.
On admet que X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(800; 0,05)$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X_1 par la loi normale de paramètres $m = 40$ et $\sigma = 6$.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(40; 6)$.

1. Justifier les valeurs de m et σ.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 36 et 44 articles défectueux dans le lot, c'est à dire $P(35,5 \leq Z \leq 44,5)$.
3. Calculer $P(Z \leq 26,5)$. A l'aide d'une phrase, traduire le résultat obtenu.

Exercice 2 (12 points) Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle.
On considère l'équation différentielle
$$y' + \frac{-1}{1+e^x}y = 0 \qquad (E)$$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = -x + \ln(1+e^x)$$
est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{1+e^x}$
2. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (E).
3. Déterminer la solution F de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = \dfrac{1}{2}$

B. Etude d'une fonction
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. (a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Montrer que pour tout x réel la fonction dérivée de F est définie par
$$F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$
   (b) En déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Démontrer que le développement limité de F à l'ordre 3 en 0 est
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$$
   (b) Déduire du (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage du point d'abscisse 0.
4. Construire sur la copie la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ défini au début de partie B.

C. Calculs d'intégrales.

1. On note p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$
   Démontrer que la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{0,3} p(x)\ dx$ est $I = 0,16125$.
2. On note $J = \displaystyle\int_0^{0,3} F(x)\ dx$.
   (a) Démontrer que $J = \ln\dfrac{1+e^{0,3}}{2}$
   (b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I et la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J. Quelle remarque peut-on faire ?