Révisions première année (1)

Exercice 1 On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y'' + 4y' + 4y = 0$
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$ est solution particulière de (E). En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par les points $I(-1; 0)$ et $J(0, \dfrac{1}{2})$
4. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
   A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer la valeur exacte de I.

Exercice 2 On note (E) l'équation différentielle

$$(e^x - 1)\,y' + e^x y = 1$$

1. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de $(H) : (e^x - 1)\,y' + e^x y = 0$
2. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3 Dans une notice concernant le ciments *Lafarge,* on considère comme élevée la probabilité que la résistance à la compression à 28 jours d'un ciment soit comprise entre 50 MPa et 60 MPa. On se propose de déterminer cette probabilité.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un sac de ciment choisi au hasard dans la fabrication d'une usine, associe sa résistance à la compression à 28 jours.
   Un croquis sur la notice permet d'admettre que X suit la loi normale de moyenne $m = 55$ MPa et d'écart-type $\sigma = 3$ MPa.
   Déterminer la probabilité $P\,(50 \leq X \leq 60)$ à 10^{-4} près.
2. La résistance minimale à la compression à 28 jours, garantie pour chaque sac par cette usine, est de 45 MPa. Quelle est la probabilité d'avoir un sac pour lequel la résistance à la compression à 28 jours est insuffisante ?
   Déterminer cette probabilité à 10^{-4} près.

Exercice 4 On étudie la cote d'une pièce produite par une machine. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prise au hasard, associe sa cote x. X suit la loi normale de moyenne $m = 20$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,20$ mm.

1. Une cote x est correcte si $m - 3\sigma \leq x \leq m + 3\sigma$. Calculer la probabilité qu'une cote soit correcte.
2. Déterminer la valeur a telle que $P\,(X \leq a) = 0,20$.