

Lois de probabilité (2)

Exercice 1 Les six faces d'un dé parfaitement équilibré sont notées 2,2,5,5,5,9. On lance le dé. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de dé, associe le numéro inscrit sur la face supérieure du dé.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$. Que représente ce résultat.
3. Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 2 Une usine fabrique des pièces en grande série, en deux phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut A et la seconde un défaut B . L'expérience montre qu'une pièce peut présenter le défaut A dans 2% des cas et le défaut B dans 10% des cas.

1. Calculer les probabilités qu'une même pièce tirée au hasard
 - (a) présente les deux défauts,
 - (b) ne présente aucun des deux défauts,
 - (c) présente un et un seul des deux défauts.
2. On prélève 300 pièces dans le stock (on assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise).
 - (a) Soit X la variable aléatoire qui, à un tel prélèvement, associe le nombre de pièces présentant le défaut A .
Déterminer la loi de probabilité de X . En déterminer l'espérance et l'écart-type.
 - (b) Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson
Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
Utiliser cette approximation pour calculer la probabilité que, parmi 300 pièces, 10 présentent le défaut A ?

Exercice 3 Les parties A et B sont indépendantes

Dans cet exercice l'unité de longueur est le millimètre.

Une machine fabrique en grande série un certain type de pièces rectangulaires en tôle.

A. On note L la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa largeur.

On admet que L suit la loi normale de moyenne 58,11 et d'écart type 0,15.

Déterminer la probabilité p_1 qu'une pièce prélevée au hasard dans cette production ait une largeur comprise entre 57,90 et 58,30. Arrondir à 10^{-4} .

B. On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est 0,06.

On prélève au hasard 50 pièces.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de 50 pièces avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces ainsi prélevées, associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

2. Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité de chacun des événements suivants :
 E_1 : "l'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse".
 E_2 : "l'échantillon comporte une seule pièce défectueuse".
 E_3 : "l'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses".
3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de même espérance mathématique.
 - (a) Déterminer le paramètre de cette loi.
 - (b) En utilisant cette loi, déterminer la nouvelle probabilité de chacun des trois événements définis à la question 2. Arrondir à 10^{-2} .

Exercice 4 Une machine produit des pièces cylindriques destinées à faire des axes de moteurs. On étudie le diamètre, exprimé en millimètres, des pièces issues de cette fabrication.

Les deux questions 1. et 2. sont indépendantes.

Toutes les probabilités seront calculées à 10^{-3} près.

1. On admet que la variable aléatoire X qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre, suit la loi normale de moyenne $m = 16,5$ et d'écart type $\sigma = 0,1$.
 - (a) Déterminer la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,4; 16,6]$.
 - (b) Déterminer le nombre réel positif h , tel que la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[16,5 - h; 16,5 + h]$ soit égale à 0,95.
2. On suppose maintenant que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est $p = 0,05$. On prélève au hasard 60 pièces. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 60 pièces. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 60 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses.
 - (a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
 - (b) Calculer $P(Y \leq 2)$.
 - (c) On approche la loi binomiale de la question précédente par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi. En utilisant cette loi de Poisson, déterminer la probabilité qu'un échantillon de 60 pièces contienne au plus deux pièces défectueuses.