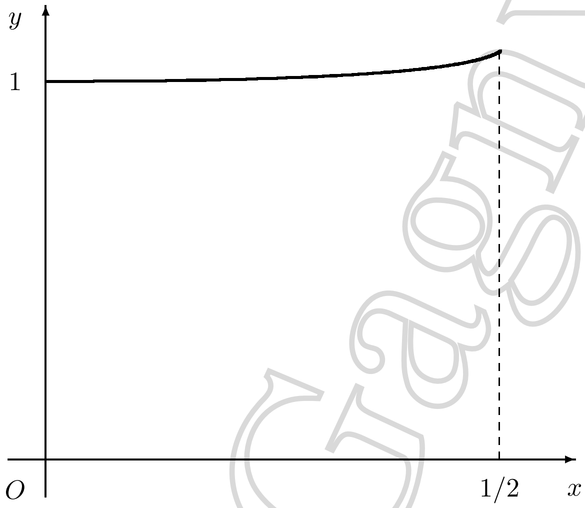
Révisions première année (2)

Exercice 1 Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{1+x}\, dx$$



La figure donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.
Le plan est muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Unités : 10 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Interpréter graphiquement l'intégrale I.
2. Recherche d'une valeur approchée de I par la méthode des trapèzes.
   On note M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$.
   Soient H_1, H_2, H_3, H_4 les projections orthogonales respectives sur l'axe $\left(O; \vec{i}\right)$ des points M_1, M_2, M_3, M_4.
   Donner une valeur approchée $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près, en unités d'aire, de la somme des aires des quatre trapèzes $H_1M_1M_0O$, $H_2M_2M_1H_1$, $H_3M_3M_2H_2$, $H_4M_4M_3H_3$
3. Recherche d'un encadrement de l'intégrale I.
   (a) Etudier les variations de f sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et en déduire que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$:
   $$1 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{e}}{3}$$
   (b) Démontrer que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$:
   $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$$

(c) Déduire du (3b) que

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\, e^x \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx$$

(d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\, e^x \, dx$$

(e) Déduire de l'encadrement obtenu au (3a) que

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) \, dx \leq \frac{\sqrt{e}}{36}$$

(f) A l'aide des questions (3c), (3d) et (3e), écrire un encadrement de l'intégrale I. En déduire un encadrement de I, d'amplitude 5.10^{-3}, par des nombres décimaux.

Exercice 2 Dans un lot comportant un très grand nombre de pièces, on observe que 5 % des pièces fabriquées par une machine étant défectueuses, on décide de les contrôler.

Le procédé de contrôle est tel que

- Si la pièce est bonne elle est acceptée
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée dans 95 % des cas.

1. Montrer que la probabilité qu'une pièce soit refusée au contrôle est $p = 0,0475$
2. On contrôle des lots de n pièces.
   Soit X la variable aléatoire qui, à un lot de n pièces choisies au hasard, associe le nombre de pièces de ce lot refusées au contrôle.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

   (b) On prend $n = 100$.
   Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
   Calculer, à l'aide de cette loi de Poisson, la probabilité $P(X \leq 3)$.

   (c) On prend maintenant $n = 1000$.
   On admet que la loi de X peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres à 10^{-1} près.
   Utiliser cette approximation pour calculer $P(X \leq 30)$ en utilisant la correction de continuité, puis sans l'utiliser.