

# Nombres complexes

**Exercice 1** Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.  
 $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$

On considère les points  $A(4; 0)$  et  $C(-2\sqrt{3}; -2)$  d'affixes respectives  $z_A = 4$  et  $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$  et les points  $B$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_B = iz_A$  et  $z_D = iz_C$

- Calculer les modules des nombres complexes  $z_A$  et  $z_C$ .
  - En déduire les modules des nombres complexes  $z_B$  et  $z_D$ .
  - Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Montrer que les coordonnées de  $B$  et  $D$  sont respectivement  $(0; 4)$  et  $(2; -2\sqrt{3})$ .
  - Placer les points  $A, B, C$  et  $D$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
- Montrer que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont parallèles.
  - Montrer que les diagonales du quadrilatère  $ABCD$  sont perpendiculaires.

**Exercice 2** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 2 cm.

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 6z + 13 = 0$
- Déterminer les réels  $b$  et  $c$  tels que pour tout complexe  $z$  :

$$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c)$$

- Soient  $A, B, E$  et  $F$  les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i; z_B = 3 - 2i; z_E = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}; z_F = 3$$

- Placer les points  $A, B, E$  et  $F$  dans le plan complexe.
- Calculer les distances  $FA, FB$ , et  $FE$ . En déduire que les points  $A, B$  et  $E$  appartiennent à un cercle  $\Gamma$  de centre  $F$ .
- Quelle est la nature du triangle  $ABE$  ?

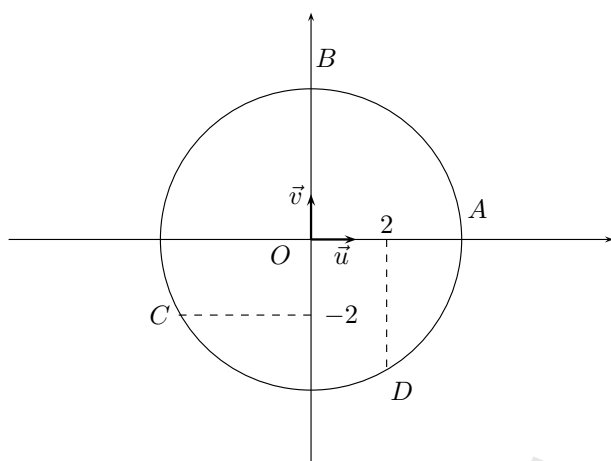
**Exercice 3** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 2 cm.

- Vérifier que  $2 + \sqrt{3} - i$  est solution de l'équation  $z^2 - 2(2 + \sqrt{3})z + 4(2 + \sqrt{3}) = 0$
  - Déterminer l'autre solution de cette équation
- Soient  $z_1 = 2 + \sqrt{3} + i$  et  $z_2 = 2 + \sqrt{3} - i$ 
  - Placer dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A$  d'affixe  $z_1$  et  $B$  d'affixe  $z_2$ .
  - Vérifier que  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
  - Déterminer module et argument de  $\frac{z_2}{z_1}$
  - Déduire du résultat précédent l'angle de la rotation de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$ .
- Déterminer l'affixe  $z_3$  du point  $C$  milieu de  $[AB]$ .
  - Quelle est la nature du triangle  $OCA$  ?
- Calculer  $|z_1|$  et  $|z_3|$ .
  - Déduire des résultats précédents que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

# Solutions

## Solution 1

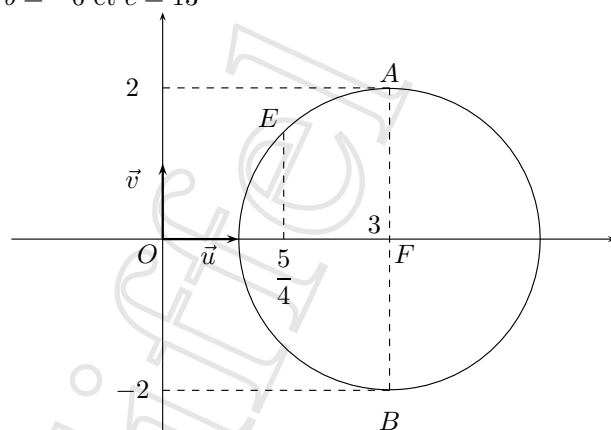
- $|z_A| = |4| = 4$  et  $|z_C| = |-2\sqrt{3} - i| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 4$
  - $|z_B| = |iz_A| = |i||z_A| = 1 \times 4 = 4$  et  $|z_D| = |iz_C| = |i||z_C| = 1 \times 4 = 4$
  - $OA = OB = OC = OD = 4$  donc  $A, B, C$  et  $D$  sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 4.
- $z_B = iz_A = 4i \Rightarrow B(0, 4)$  et  $z_D = iz_C = 2 - 2i\sqrt{3} \Rightarrow D(2; -2\sqrt{3})$
  - Placer  $A$  et  $B$  ne pose pas de problème.  $C$ , est le point du cercle de centre  $O$  et de rayon 4, d'ordonnée  $-2$  et d'abscisse négative. Pour  $D$ , c'est le point du cercle d'abscisse 2 et d'ordonnée négative.



- $z_D - z_A = 2 - 2i\sqrt{3} - 4 = -2 - 2i\sqrt{3}$  et  $z_C - z_B = -2\sqrt{3} - 2i - 4i = -2\sqrt{3} - 6i$   
 $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -6 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{AD}$  donc  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont colinéaires.
  - $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} - 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2(-2\sqrt{3} - 4) - 2(-2\sqrt{3} - 4) = 0$

## Solution 2

- $\Delta = -16 < 0$  donc deux racines complexes conjuguées :  $z_1 = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = 3 - 2i$  et  $z_2 = \bar{z}_1 = 3 + 2i$
- On trouve  $b = -6$  et  $c = 13$



- $FA = |z_A - z_F| = |2i| = 2$  ;  $FB = |z_B - z_F| = |-2i| = 2$   
 $FE = |z_E - z_F| = \left| -\frac{7}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4} \right| = \sqrt{\left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{8}{4} = 2$   
donc  $A, B$  et  $E$  appartiennent au cercle  $\Gamma$  de centre  $F$  et de rayon 2.

(c)  $[AB]$  étant un diamètre du cercle,  $ABE$  est rectangle en  $E$ .

### Solution 3

1. (a)  $(2 + \sqrt{3} - i)^2 - 2(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - i) + 4(2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^2 - 2i(2 + \sqrt{3}) + i^2 - 2(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - i) + 4(2 + \sqrt{3})$   
 $= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4i - 2i\sqrt{3} - 1 - 2(4 + 2\sqrt{3} - 2i + 2\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}) + 8 + 4\sqrt{3} = 0$
- (b) Si  $z_1$  est la racine trouvée dans 1(a) et  $z_2$  l'autre racine :  $z_1 + z_2 = 2(2 + \sqrt{3})$   
*Rappel : la somme des racines de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  vaut  $-\frac{b}{a}$  (et le produit  $\frac{c}{a}$ ).*  
 D'où :  $z_2 = 2(2 + \sqrt{3}) - z_1 = 2(2 + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3} - i) = 2 + \sqrt{3} + i$   
*Remarque : lorsque les coefficients sont réels et que  $\Delta < 0$ , les racines sont conjuguées*
2. (a) pas de problème
- (b)  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 + \sqrt{3} - i}{2 + \sqrt{3} + i} = \frac{(2 + \sqrt{3} - i)(2 + \sqrt{3} - i)}{(2 + \sqrt{3} + i)(2 + \sqrt{3} - i)} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 2i(2 + \sqrt{3}) + i^2}{(2 + \sqrt{3})^2 + 1}$   
 $= \frac{6 + 4\sqrt{3} - 4i - 2i\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{(6 + 4\sqrt{3} - 4i - 2i\sqrt{3})(8 - 4\sqrt{3})}{(8 + 4\sqrt{3})(8 - 4\sqrt{3})} = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{64 - 48} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$
- (c)  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left[1; -\frac{\pi}{6}\right]$
- (d) L'angle cherché est  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \arg \frac{z_2}{z_1} = -\frac{\pi}{6}$
3. (a)  $z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 2 + \sqrt{3}$
- (b)  $OAC$  est rectangle en  $C$ .
4. (a)  $|z_1| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  et  $|z_3| = 2 + \sqrt{3}$
- (b)  $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \widehat{OAC} = \frac{OC}{OA} = \frac{|z_3|}{|z_1|} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$