Fonction réciproque

Exercice 1 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} + \arctan x^2$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2} \arcsin \sqrt{x}$
4. $f(x) = \ln(1+x) + \ln(1-x) + \dfrac{1}{2} \arctan x$

Exercice 2 Montrer que l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$$

admet une solution unique dans $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Exercice 3 Montrer que l'équation

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$$

admet une solution unique dans $[-1; 0]$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $[4; 5]$ par

$$f(x) = x^2 (3 - 2\ln x)$$

Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique dans l'intervalle $[4; 5]$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette solution.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Déterminer explicitement f^{-1}.
3. Tracer les représentations graphiques de f et f^{-1}

Solutions

Solution de l'exercice 1

1. f est définie si $x \neq 0$ et $-1 \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$ ce qui conduit à $\mathcal{D} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
2. f est définie si $x \neq 0$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$
3. f est définie si $x \geq 0$ et $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$ ce qui conduit à $\mathcal{D} = [0; 1]$
4. f est définie si $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$ ce qui conduit à $\mathcal{D} =]-1; 1[$

Solution de l'exercice 2 Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$
Le théorème sur le signe du trinôme conduit au tableau de variations :

x		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Donc f est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.
Donc, pour tout réel $\lambda \in \left[f\left(-\dfrac{1}{2}\right); f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] = \left[-\dfrac{41}{8}; \dfrac{33}{8}\right]$ l'équation $f(x) = \lambda$ possède une solution unique $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$
On peut prendre $\lambda = 0$ car $\lambda \in \left[-\dfrac{41}{8}; \dfrac{33}{8}\right]$
A l'aide d'une calculette on trouve $-0{,}11 < \alpha < -0{,}10$

Solution de l'exercice 3 Soit $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel : $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x\left(x^2 + x - 2\right)$
Le théorème sur le signe du trinôme conduit au tableau de variations :

x		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Donc f est dérivable et strictement croissante sur $[-1; 0]$.
Donc, pour tout réel $\lambda \in [f(-1); f(0)] = [-8; 5]$ l'équation $f(x) = \lambda$ possède une solution unique $\alpha \in [-1; 0]$
On peut prendre $\lambda = 0$ car $\lambda \in [-8; 5]$
A l'aide d'une calculette on trouve $-0{,}613 < \alpha < -0{,}612$

Solution de l'exercice 4 Soit $f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = 2x(3 - 2\ln x) + x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 4x(1 - \ln x)$
$f'(x)$ a même signe que $1 - \ln x$ car $x > 0$
De $\ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$ on déduit le tableau de variations :

x	0		e	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$

Donc f est dérivable et strictement décroissante sur $[4;5]$.
Donc, pour tout réel $\lambda \in [f(5); f(4)]$ l'équation $f(x) = \lambda$ possède une solution unique $\alpha \in [4;5]$
On peut prendre $\lambda = 3$ car $\lambda \in [f(5); f(4)]$ et que $f(5) < 3$ et $f(4) > 3$
A l'aide d'une calculette on trouve $4{,}481 < \alpha < 4{,}482$

Solution de l'exercice 5

1. f est dérivable sur $[0;2]$ et pour tout $x \in [0;2]$: $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} > 0$

   Donc f est dérivable et strictement croissante sur $[0;2]$

   Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[f(0); f(2)] = \left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{4}\right]$

2. $\begin{cases} x = f(y) \\ y \in [0;2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in \left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{4}\right] \end{cases}$

   $x = f(y) = \dfrac{y-3}{y+2} \Leftrightarrow x(y+2) = y-3 \Leftrightarrow y(x-1) = -2x-3 \Leftrightarrow y = \dfrac{-2x-3}{x-1}$

   Donc f^{-1} est définie sur $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{4}\right]$ par $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-3}{x-1}$

3. Dans un repère orthonormal, les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice qui est la droite d'équation $y = x$.