# Développements limités

**Exercice 1** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{2x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{1/x} - x\right)$

**Exercice 2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 1\right) e^{2x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

**Exercice 3** Soit $f$ la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2(1+x)} + \ln(1+x)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f$ au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

**Exercice 4** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2) e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f$ au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

**Exercice 5** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x) e^{-\frac{1}{x}}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $g(t) = (1+t) e^{-t}$
2. En déduire, en posant $t = \dfrac{1}{x}$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
   où $a, b$ et $c$ sont des réels que l'on déterminera.
3. En déduire :
   (a) une équation de l'asymptote $\Delta$ à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.