Développements limités

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{e^x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \arcsin(2x)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0
2. En déduire :
   (a) une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage de 0.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x-1}{x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $g(t) = \ln(1-t)$
2. En déduire, en posant $t = \dfrac{1}{x}$ que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

   où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
3. En déduire :
   (a) une équation de l'asymptote Δ à $\mathcal{C}$ vers $+\infty$
   (b) la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.