



Développements limités

Exercice 1 Calculer

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{1}{2x^2} - \cos \frac{1}{x} \right)$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \arcsin x$

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Donner l'allure de la courbe \mathcal{C}_f représentative de f au voisinage de son point d'abscisse 0.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = 3e^{-x/3} \cos 3x$

1. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Donner l'allure de la courbe \mathcal{C}_f représentative de f au voisinage de son point d'abscisse 0.

Exercice 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

1. Déterminer le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.
2. En déduire qu'il existe des réels a, b, c que l'on déterminera tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

3. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f représentative de f admet pour asymptote une droite Δ (à déterminer) au voisinage de $+\infty$.
4. Etudier, au voisinage de $+\infty$, la position de \mathcal{C}_f par rapport à Δ .