Fonction réciproque

Exercice 1 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{2}$
2. $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$
4. $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\arctan x$
5. $f(x) = e^{\arctan x}$
6. $f(x) = \arctan(e^x)$
7. $f(x) = \arccos(\ln x)$

Exercice 2 Déterminer les ensembles de dérivation des fonctions de l'exercice précédent, puis calculer leurs fonctions dérivées.

Exercice 3 On pose $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
2. Calculer $f'(x)$. Que peut-on en déduire pour $f(x)$?
3. Montrer que $\forall x \in [-1;1] : \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 4 Montrer que l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$$

admet une solution unique dans $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $[0;8]$ par $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Déterminer explicitement f^{-1}.
3. Tracer les représentations graphiques de f et f^{-1}