

Intégration (1)

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

4. $\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2} dx$

2. $\int_0^1 x(x^2+1)^2 dx$

3. $\int_0^{\pi/2} (\sin 3x + 2 \cos 2x) dx$

5. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx$

Exercice 2 Calculer, en utilisant la méthode d'intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\int_{-3}^0 (x+1)e^{-x} dx$

4. $\int_0^{\pi/4} \text{Arctan } x dx$

2. $\int_1^e x^2 \ln x dx$

3. $\int_0^{\pi/2} t \cos t dt$

5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x dx$

Pour la dernière intégrale, on procèdera à deux intégrations par parties successives.

Solutions

Solution de l'exercice 1

- $\int_1^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 3 + \ln 2$
- $\int_0^1 x(x^2 + 1)^2 dx = \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{6}$
- $\int_0^{\pi/2} (\sin 3x + 2 \cos 2x) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x + \sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$
- $\int_0^1 \frac{1-2x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = [\arctan x - \ln|1+x^2|]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln 2$
- $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{20}{3}$

Solution de l'exercice 2

- $\int_{-3}^0 (x+1)e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_1^e - \int_{-3}^0 (-e^{-x}) dx = -2 - e^3$
Poser $u = x+1$ et $v' = e^{-x}$ d'où $u' = 1$ et $v = -e^{-x}$
- $\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1+2e^3}{9}$
Poser $u = \ln x$ et $v' = x^2$ d'où $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{1}{3}x^3$
- $\int_0^{\pi/2} t \cos t dt = [t \sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{\pi}{2} - 1$
Poser $u = t$ et $v' = \cos t$ d'où $u' = 1$ et $v = \sin t$
- $\int_0^{\pi/4} \arctan x dx = [x \arctan x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} \arctan \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi^2}{16} + 1\right)$
Poser $u = \arctan x$ et $v' = 1$ d'où $u' = \frac{1}{1+x^2}$ et $v = x$
- $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x) e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} - J$
Poser $u = e^x$ et $v' = \cos x$ d'où $u' = e^x$ et $v = \sin x$
 $J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^x \sin x dx = - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (-e^x \cos x) dx = I$
Poser $u = e^x$ et $v' = \sin x$ d'où $u' = e^x$ et $v = -\cos x$
Donc $I = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} - I$ d'où $I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}) = \cosh \frac{\pi}{2}$