Courbes paramétrées

Exercice 1 Soit Γ la courbedéfinie par la représentation paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) = \cos(2t) - 2\cos t \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2\sin t \end{array} \right. \quad \textit{avec } t \in [-\pi;\pi]$$

1. Montrer que la courbe Γ admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.
2. (a) Calculer $f'(t)$.
   Montrer que $f'(t) = -4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}$

   (b) Etablir le signe de $f'(t)$ sur $[0;\pi]$
3. On admet que $g'(t) = -4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}$ et que le signe de $g'(t)$ est donné par le tableau suivant

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	

   Dresser surl'intervalle $[0;\pi]$ le tableau de variations conjointes des fonctions f et g.
4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ aux points B, C, D de paramètres respectifs $t_B = \frac{\pi}{3}$, $t_C = \frac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$.
5. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unitégraphique 2cm. On admet que la tangente au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{\imath}$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe Γ.

Exercice 2 Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 4cm, on donne $A(-1;0)$; $B(0;3)$; $C(2;2)$ et $D(3;1)$. Le but de l'exercice est de déterminer et de tracer une courbe passant par A et D, admettant $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur tangent en A et $\overrightarrow{DC}$ pour vecteur tangent en D. Pour tout $t \in [0;1]$ soit M le point défini par

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^3\,\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD}$$

1. Calculer en fonction de t les cooordonnées du point M.
2. Soient f et g les fonctions définie sur $[0;1]$ par

$$f(t) = -1 + 3t + 3t^2 - 2t^3 \text{ et } g(t) = 9t - 12t^2 + 4t^3$$

   Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0;1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
3. On note Γ la courbe dont une représentation paramétrique est $\left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right.$ où $t \in [0;1]$.

   (a) Montrer que Γ admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur tangent en A et $\overrightarrow{DC}$ pour vecteur tangent en D.

   (b) Tracer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis la courbe Γ.

Note : La courbe obtenue est la courbe de Bézier (ingénieur français) dont A, B, C, D sont les points de définition. Les courbes de Bézier sont à la base du DAO (dessin assisté par ordinateur).