Intégration (2)

Exercice 1 Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 xe^{2x}\, dx$$

Exercice 2 Calculer

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt$$

puis, à l'aide d'une intégration par parties :

$$J = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt$$

Exercice 3 Calculer

$$I = \int_0^1 \left(x^2+3x\right) e^{-x}\, dx$$

à l'aide de deux intégrations par parties.

Exercice 4 Calculer

$$I = \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

à l'aide du changement de variable $t = 1+\sqrt{x}$

Exercice 5 Calculer

$$I = \int_0^3 \frac{3x}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x+1}$

Exercice 6 Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$$

à l'aide du changement de variable $x = t-1$

Solutions

Solution de l'exercice 1 $I=\int_0^1 xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

Solution de l'exercice 2 $I=\int_0^1\sqrt{1+t}\,dt=\int_0^1(1+t)^{1/2}\;dt=\left[\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$

$J=\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt=\frac{4}{3}\sqrt{2}-\int_0^1\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\;dt=\frac{4}{15}\sqrt{2}+\frac{4}{15}$

Solution de l'exercice 3 $I=\int_0^1\left(x^2+3x\right)e^{-x}\,dx=-4e^{-1}-\int_0^1 e^{-x}\left(-2x-3\right)\,dx$

$\int_0^1 e^{-x}\left(-2x-3\right)\,dx=5e^{-1}-\int_0^1 2e^{-x}\,dx-3=7e^{-1}-5$

D'où $I=-4e^{-1}-\left(7e^{-1}-5\right)=5-11e^{-1}$

Solution de l'exercice 4 $I=\int_1^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int_2^3\frac{2t-2}{t}\,dt=\int_2^3\left(2-\frac{2}{t}\right)\,dt=2\ln 2-2\ln 3+2$

Solution de l'exercice 5 $I=\int_0^3\frac{3x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int_1^2\frac{6}{t}\left(t^3-t\right)\,dt=8$

Solution de l'exercice 6 $I=\int_1^2\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=\int_2^3\frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan 3-\arctan 2$