Courbes paramétrées

Exercice 1 Le plan est muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 1cm). A tout nombre réel t de l'intervalle $[-1;2]$ on associe le point $M(t)$ de coordonnées $x = f(t) = 2t^3 - 3t^2$ et $y = g(t) = 4t - t^2$. On note $\mathcal{C}$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[-1;2]$.

1. Etudier les variations de f et g sur $[-1;2]$.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

t	-1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2
$f'(t)$	
$g'(t)$	
$f(t)$	
$g(t)$	

2. Préciser les tangentes aux points $M(-1)$, $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$ (obtenus pour $t=-1$, $t=0$, $t=1$, $t=2$)
   Construire ces tangentes et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 *On se propose dans cet exercice de construire une courbe à l'aide d'un modèle utilisé en DAO (dessin assisté par ordinateur).*
Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, unité graphique : 5 cm, on donne les points $A_0(-1;0)$, $A_1(-1;2)$, $A_2(1;-1)$, $A_3(2;0)$.
Pour tout t de l'intervalle $[0;1]$ on définit le point $M(t)$ par

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^3\,\overrightarrow{OA_0} + 3t(1-t)^2\,\overrightarrow{OA_1} + 3t^2(1-t)\,\overrightarrow{OA_2} + t^3\overrightarrow{OA_3}$$

1. Calculer les coordonnées $(x;y)$ du point M.
2. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques définies pour tout t de $[0;1]$ par

$$\begin{cases} x = f(t) = -3t^3 + 6t^2 - 1 \\ y = g(t) = 3\left(3t^3 - 5t^2 + 2t\right) \end{cases}$$

   (a) Etudier les variations des fonctions f et g lorsque t décrit l'intervalle $[0;1]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
   (b) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   (c) Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ en chacun de ses points appartenant à l'axe des abscisses.
   (d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes déterminées en (c).
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3.

Exercice 3 On considère les fonctions f et g définies dans l'intervalle $I = [-\ln 7; \ln 7]$ par $f(t) = \cosh t = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$ et $g(t) = \sinh t = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$.
Soit H la courbe définie paramétriquement par $\left\{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right.$ pour tout t appartenant à l'intervalle I, dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ où l'unité graphique est 2 cm.

1. Montrer que l'axe des abscisses est axe de symétrie de la courbe H.
2. (a) Montrer que pour tout t positif, on a : $e^t \geq e^{-t}$.
   (b) Etudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $[0; \ln 7]$ et présenter le tableau correspondant de leurs variations conjointes.
3. Soient $A; B, C$ les points de la courbe H correspondant aux valeurs suivantes du paramètre : $t = 0$ pour A, $t = \ln 7$ pour B et $t = -\ln 7$ pou C.
   (a) Calculer les coordonnées de A et montrer que celles de B sont $\left(\dfrac{25}{7}; \dfrac{24}{7}\right)$.
   (b) Déterminer les coordonnées de C en utilisant la symétrie mentionnée à la question 1.
   (c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe H au point B.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe H en A.
   (e) Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tracer les tangentes en A et B à la courbe H, puis la courbe H pour t appartenant à l'intervalle I.
   On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.
4. Montrer que pour tout t de l'intervalle I, on a $(f(t))^2 - (g(t))^2 = 1$