Calcul matriciel

Exercice 1 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On pose $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$.

1. Déterminer a_{23} ; a_{31} ; $6a_{11}^2 + 3a_{22}^2 - a_{33}^2$
2. Déterminer α pour que $AB = C$

Exercice 2 On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$

1. Peut-on déterminer les réels a, b, c et d pour que $AB = BA$?
2. Peut-on déterminer les réels a et b pour que $A^2 = A$?
3. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 3 On veut résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ x - y + 5z = 10 \\ 4x + 7y - 8z = -5 \end{cases}$

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $AX = B$
2. Calculer $A^3 + 8A^2 - 50A - 62I$
3. En déduire la matrice A' telle que $AA' = A'A = I$
4. En déduire X puis la solution du système.

Exercice 4 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2.
2. Déterminer les réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$
3. En déduire la matrice A' telle que $AA' = A'A = I$

Exercice 5 Pour une fabrication, une entreprise utilisera x pièces de type X, y pièces de type Y et z pièces de type Z.
La masse et le coût de chacune de ces pièces sont donnés par le tableau suivant :

	X	Y	Z
Masse en grammes	$2,5$	2	1
Coût en euros	1	$1,5$	$0,5$

L'entreprise effectue une étude en vue d'optimiser cette fabrication. Pour cela, elle doit considérer le nombre total N des pièces employées, leur masse totale M en grammes et leur coût total C en euros.

1. Exprimer N, M et C en fonction de x, y et z.

2. Résoudre le système d'inconnues x, y, z : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=N \\ 2,5x+2y+z=M \\ x+1,5y+0,5z=C \end{array}\right.$

3. On considère les matrices $U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice A carrée d'ordre 3 telle que le système du **2°** soit équivalent à l'égalité matricielle $AU=B$.

4. On désigne par A' la matrice $A'=\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & -1 \\ -0,25 & -0,5 & 1,5 \\ 1,75 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

   Calculer le produit de matrices $A'A$.

5. (a) Sans utiliser l'expression des matrices sous forme de tableaux de nombres, démontrer que l'égalité matricielle $AU=B$ est équivalente à l'égalité matricielle $U=A'B$.

   (b) En déduire l'écriture de U en fonction de N, M et C.

6. L'étude a montré que la fabrication est optimale lorsque sont employées au total 140 pièces d'une masse totale de 275 g et d'un coût total de 135 euros.

   Dans ces conditions, calculer le nombre de pièces de chacun des types X, Y et Z qui seront utilisées pour cette fabrication.