Probabilités

Exercice 1 Une entreprise fabrique, en très grand nombre, des ampoules électriques. Soit X la variable aléatoire qui, à toute ampoule, fait correspondre sa durée de vie, exprimée en heures.
On admet que X suit la loi normale d'espérance mathématique $E(X) = 1232$ et d'écart-type $\sigma(X) = 100$.

1. (a) Déterminer la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie inférieure à 1000 heures.
   (b) Déterminer, avec la précision permise par les tables, le réel strictement positif d, tel que $P(|X - 1232| \leq d) = 0,975$
2. On admet, dans cette question, que la probabilité qu'une ampoule du stock ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est 0,01.
   On prélève au hasard 150 ampoules dans le stock (ce prélèvement sera assimilé à un prélèvement avec remise). On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 150 ampoules, fait correspondre le nombre d'ampoules dont la durée de vie est inférieure à 1000 heures.
   (a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   Exprimer $P(Y = k)$ en fonction de k. ($k \in [\![0; 150]\!]$).
   Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de Y.
   (b) On admet que la loi de la variable aléatoire Y peut être approchée par une loi de Poisson. En déterminer le paramètre λ.
   En déduire la probabilité de l'événement suivant :
   "parmi les 150 ampoules prélevées, il n'y a pas plus de trois ampoules dont la durée de vie est inférieure à 1000 heures".

Exercice 2 Une entreprise s'approvisionne chez deux fournisseurs A et B.
60% des livraisons proviennent de chez A, le reste provient de chez B.
97% des livraisons effectuées par A satisfont aux normes de qualité exigées par l'entreprise alors que 1% des livraisons effectuées par B ne sont pas conformes aux mêmes normes de qualité.

1. Quelle est la probabilité qu'une livraison choisie au hasard ne soit pas conforme aux normes de qualité de l'entreprise ?
2. Une livraison vient d'être déclarée non conforme aux normes de qualité exigées.
   Quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A ?

Exercice 3 Les parties **I** et **II** peuvent être traitées indépendamment.
Les deux ateliers A et B d'une usine de vêtements fournissent respectivement 30 % et 70 % de la production de l'usine. Ils produisent chacun des pulls et des sweats. Dans la production de l'atelier A, il y a 20 % de pulls et 80 % de sweats. Dans celle de B, 60 % de pulls et 40 % de sweats.

I. Etude de la nature de la production de l'usine.
Soit un article choisi au hasard dans la production d'une journée.
Soient les événements :
A : "Il provient de l'atelier A"
B : "Il provient de l'atelier B"
P : "C'est un pull"
S : "C'est un sweat"

1. Calculer les probabilités des événements suivants : $A \cap P$; $A \cap S$; $B \cap S$; $B \cap P$.
2. Quel est le pourcentage de pulls dans la production de la journée ?

II. Etude de la qualité de la production de l'usine
Le pourcentage des articles défectueux est de 2 %. On prélève au hasard, avec remise, un échantillon de 50 articles. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi prélevé, associe le nombre d'articles défectueux dans cet échantillon.

1. Quelle loi de probabilité suit X ? (on justifiera la réponse et on indiquera les paramètres).
2. Calculer la probabilité des deux événements suivants
   (*on donnera les valeurs décimales arrondies à 10*$^{-3}$).
   D : "aucun article n'est défectueux"
   E : "il y a plus d'un article défectueux"
3. On convient d'approcher la loi de X par une loi de Poisson. Justifier cette approximation et déterminer le paramètre de la loi de Poisson. Soit K l'événement :"il y a au plus un article défectueux". Calculer, en utilisant cette approximation les probabilités des événements K et E *(on donnera les valeurs décimales arrondies à 10*$^{-3}$).

Exercice 4 Des machines fabriquent en grande série des plaques de tôle destinées au montage de transformateurs électriques. Ces plaques sont empilées et servent de conducteur au champ magnétique du transformateur.

L'expérience montre que, lors de la fabrication, la probabilité pour qu'une plaque soit inutilisable est 0,001

A. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3000 plaques, tirées au hasard et avec remise, associe le nombre de pièces inutilisables de ce lot.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser son espérance $E(X)$.
2. On approche la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.
   Justifier cette approximation et déterminer λ.
   Calculer, à l'aide de cette approximation, à 10^{-2} près, la probabilité pour que dans un lot de 3000 pièces on observe :
   (a) aucune plaque inutilisable
   (b) au plus deux plaques inutilisables.

B. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque plaque tirée au hasard, associe son épaisseur. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne $0,3$ mm et d'écart-type σ. Soit l'événement A : "une plaque a une épaisseur inférieure à 0,35 mm".

1. On suppose $\sigma = 0,04$ mm. Calculer $P(A)$ à 10^{-2} près.
2. On souhaite que $P(A) = 0,95$. Déterminer alors σ à 10^{-2} près.

C. La réalisation d'un transformateur nécessite un empilage de n plaques prises au hasard et numérotées de 1 à n.
On désigne par Y_i la variable aléatoire qui, à chaque plaque numérotée i prise au hasard, associe son épaisseur.
Chacune des variables aléatoires Y_i suit la même loi que la variable aléatoire Y définie au **B-1).**
Les n variables aléatoires Y_i sont indépendantes.
On appelle H_n la variable aléatoire prenant pour valeur la hauteur de l'empilage, c'est à dire

$$H_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

1. Calculer en fonction de n :
   (a) l'espérance de H_n : $E(H_n)$
   (b) la variance de H_n : $V(H_n)$
2. On sait que H_n suit une loi normale. Montrer que la valeur maximale n_0 de n telle que $P(H_n < 125)$ soit supérieure ou égale à 0,975 est une solution de l'inéquation :

$$0,3z + 1,96 \times 0,04\sqrt{z} - 125 \leq 0$$

   En posant $y = \sqrt{z}$ résoudre cette inéquation et en déduire n_0.