



Equations différentielles du premier ordre

Exercice 1 Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = x \quad (E)$$

1. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$xy' - y = 0 \quad (H)$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = (ax + b) \ln x$$

soit solution de l'équation (E) .

3. Déterminer la solution générale de (E) sur \mathbb{R}_+^* (c'est à dire l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^*).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative \mathcal{C} passe par le point $A(1; 2)$.
5. Déterminer la solution h de (E) dont la courbe représentative \mathcal{C} admet au point d'abscisse 1 une tangente "horizontale" (c'est à dire parallèle à l'axe des abscisses).

Exercice 2 Soit l'équation différentielle

$$(x^2 + 2x + 2) y' - (x + 1) y = 5x + 7 \quad (E)$$

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(x^2 + 2x + 2) y' - (x + 1) y = 0 \quad (H)$$

2. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = ax + b$$

soit solution de l'équation (E) .

3. Déterminer la solution générale de (E) sur \mathbb{R} .
4. Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en $\frac{7}{5}$

Exercice 3 Soit l'équation différentielle

$$(e^x - 1) y' + e^x y = 1 \quad (E)$$

1. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de :

$$(e^x - 1) y' + e^x y = 0 \quad (H)$$

2. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Déterminer, sur $]0; +\infty[$, la solution générale de l'équation (E) .
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(1) = 0$.



Exercice 4 Soit G la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$G(x) = \int_1^x \frac{2}{t^3} \ln t \, dt$$

et soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = \frac{2}{x^3} \ln x$$

1. Calculer, pour tout x de \mathbb{R}_+^* : $G'(x)$.
2. Déterminer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$xy' - 2y = 0 \tag{H}$$

4. Déterminer, sur \mathbb{R}_+^* , à l'aide de la méthode de variation de la constante, une solution de l'équation différentielle

$$xy' - 2y = -2 \ln x \tag{E}$$

5. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative \mathcal{C} passe par le point $A(1; 2)$.